

Geometria, kevät 2014

Kurssin käytännön asiat ja johdattelua geometrian
maailmoihin

Jani Hannula, jani.hannula@helsinki.fi

15. tammikuuta 2014

Kurssin käytännöt

- Luennot (Viikot 3-8 ja 11-17, pääsiäisloma 17.-23.4.)
 - ke 8-10 CK112
 - pe 9-12 CK112
- Harjoitusryhmät
 - ma 12-14, B120, Ville-Pekka Kilpi
 - ke 10-12, BK106, Ville-Pekka Kilpi
 - to 10-12, C129, Ville-Pekka Kilpi
- Ryhmäprojekti
- Kurssikokeet:
 - 1. kurssikoe 24.2. klo 13-15 Exactumin auditorioissa
 - 2. kurssikoe 28.4. klo 13-15 Exactumin auditorioissa
- Harjoitustehtävät, luentopäiväkirja ja tiedotusasiat päivittyvät kurssin kotisivulle.

Kurssin käytännöt

Ryhmäprojektissa ryhmä (3-5 hlö, mieluiten 4), valitsee yhden perus-, lukio- tai ammatillisessa koulutuksessa opetettavan geometrisen aiheen.

Ryhmä valmistaa aiheesta sekä kirjallisen tuotoksen että n. 30 min esityksen. Ryhmä eriyttää jokaiselle jonkin selkeän vastuualueen, mutta kaikki ovat tietysti vastuussa kokonaisuudesta.

Esityksissä tulee käydä ilmi:

- Mistä on kyse ja mitä oppilaan tulisi oppia ko. aiheesta?
- Miten aihetta käsitellään oppikirjoissa?
- Miten aiheeseen saisi tolkkua? (Eli etsikää jokin "didaktinen ratkaisu". Se voi olla havainnollistaminen, työskentelytapa tai "vain" esim. tauluesitys.)
- Miten aihe liittyy laajempiin kokonaisuuksiin (ja/tai yliopistomatematiikkaan)?

- III periodi:
 - (Euklidisen taso)geometrian aksiomatisointi (Lehtisen materiaali)
 - Koulugeometria (Ryhmäprojektit ja harjoitustehtävät)
- IV periodi:
 - Geometriset kuvaukset (homotetia, inversio...)
 - Epäeuklidiset geometriat (Poincarén malli)
 - LOPPU ON SINUSTA KIINNI! Mikä sinusta olisi kiinnostavaa? (tyrkyllä mm. koulugeometrian syventämistä Väisälän Geometriaa tutkaillen, antiikin kolmea suurta ongelmaa, pallogeometriaa, kartioleikkauksia...)

- III periodi:
 - Opiskelija muodostaa kokonaiskuvan aksiomaattisen (taso)geometrian käsitteistä ja määritelmistä
 - Opiskelija osaa tehdä geometrian aksiomiin ja todistettuihin lauseisiin perustuvia todistuksia
 - Opiskelija muodostaa kokonaiskuvan koulugeometriasta ja hallitsee siihen liittyvän matematiikan
 - Opiskelija kehittää didaktista ajatteluaan koulugeometrian suhteen
- IV periodi:
 - Opiskelija tuntee homotetia- ja inversiokuvaukset ja osaa tehdä niihin liittyviä todistuksia
 - Opiskelija tuntee Poincarén mallin ja osaa tehdä siihen liittyviä todistuksia
 - LOPUT TAVOITTEET MUODOSTETAAN YHDESSÄ!

Geometrian historiasta

- Geometrian juuret varhaisissa kulttuureissa (Egypti, Babylonia, Kiina, Intia).
- Etymologia: *geo* = maa, *metria* = mitata
- Antiikin kreikkaan geometria tuli todennäköisesti vahvasti egyptiläisten perinteen kautta

Thaleen ("vanhin" nimeltä tunnettu matemaatikko, n. 600 eKr.) kerrotaan esittäneen/todistaneen seuraavia tunnettuja geometrian teoreemoja

- Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.
- Ristikulmat ovat yhtä suuret.
- Kaksi kolmiota, joilla on yhtä suuret kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu, ovat yhtenevät. (yhtenevyyslause ksk)
- Ympyrän jokainen halkaisija jakaa ympyrän kahteen yhtä suureen osaan.
- Puoliympyrän kaaren sisältämä kulma on suora. (tunnetaan edelleenkin nimellä Thaleen lause)

Antiikin tunnettuja geometrisia ongelmia (n. 500 - 400 eKr.)

- Janojen yhteismitattomuus
- Kolme suurta ongelmaa
 - 1 Kulman kolmijako
 - 2 Ympyrän neliöinti
 - 3 Kuution kahdentaminen

Eukleides (n. 300 eKr.): *Elementa* (eli *Stoikheia* eli *Alkeet*)

- aksiomaattis-deduktiivinen esitys! (määritelmät ja aksioomat, joista johdetaan lauseet)
- sisältää joitakin ”epämääräisyyksiä” ja virheitä, mutta voidaan pitää (ensimmäisenä) malliesimerkkinä siitä, miten matematiikkaa nykyään esitetään

Geometrian historiasta

Elementan aksioomat (ei sanatarkasti):

- 1 Mistä tahansa pisteestä voidaan piirtää suora mihin tahansa pisteeseen. (Tämän on ymmärretty sisältävän implisiittisesti myös tällaisen suoran yksikäsitteisyyden.)
- 2 Jana voidaan jatkaa suoraksi
- 3 Voidaan piirtää ympyrä, jonka keskipiste on mikä hyvänsä ja säde mikä hyvänsä
- 4 Kaikki suorat kulmat ovat keskenään samat
- 5 Jos suora leikkaa kaksi muuta suoraa siten, että samalle puolelle sitä syntyy kaksi sisäpuolista leikkauskulmaa, jotka ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, niin suorat, jos niitä rajatta jatketaan, kohtaavat toisensa sillä puolen kolmatta suoraa, missä ovat kaksi mainittua kulmaa, jotka ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa (paralleeliaksioma)

Geometrian historiasta

Paralleeliaksiomaa yritettiin pitkään johtaa muista aksioomista tai korvata jollain yksinkertaisemmalla ehdolla.

1800-luvulla näytettiin, että paralleeliaksooma voidaan korvata vaihtoehtoisilla olettamuksilla ilman, että "järjestelmä sortuu" (Gauss, Bolyai, Lobatsevski). Näissä tapauksissa puhutaan *epäeuklidisesta geometriasta*.

Mikäli paralleeliaksiomaa yksinkertaisesti jätetään pois, puhutaan *neutraaligeometriasta*.

Elementan ”epätäsmällisyydet” tuli paikattua kunnolla vasta 1899, kun Hilbert muotoili tarkan geometrian aksiomatisoinnin.

Kurssillamme käytettävässä Lehtisen materiaalissa rakennetaan käytännössä tämä aksiomatisointi.

Yleiskatsauksia matematiikan historiaan:

- Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*. (Suomennettu nimellä *Tieteen kuningatar*).
- Lehtinen, M.: *Matematiikan historia*
(<http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/>)

Geometria peruskoulun ja lukion OPS:ssa

Muodostakaa n. 4 hengen ryhmiä.

Kukin ryhmä saa joko peruskoulun, lukion lyhen matematiikan tai lukion pitkän matematiikan OPS:n. (Lukion pitkän osalta kullekin ryhmälle tulee yhden kurssin aiheet.)

Luodaan yleiskuvaa siitä, minkälaista geometriaa koulussa OPS:n mukaan opetetaan.

Miettikää OPS:n perusteella, mikä olisi sisällöllisesti ja yleisten tavoitteiden osalta

- 1 ydinainesta
- 2 täydentävää tietoutta
- 3 erityistietämystä.

Otamme hetken päästä oppikirjat mukaan tarkasteluun...