FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

8. HARJOITUKSET (pe 4.4, 12-14 salissa B322)

1. Olkoot E ja F normiavaruuksia (joilla on sama skalaarikunta $\mathbb{K}$). Määritellään niiden tuloavaruus $E\times F$ vektoriavaruutena, jossa yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään luonnollisella tavalla:

$$(x,y)+(x',y') := (x+x', y+y'), \quad \lambda(x,y) := (\lambda x, \lambda y),$$

kaikilla $x, x' \in E$ ja $y, y' \in F$, sekä $\lambda \in \mathbb{K}$. Lisäksi määrittelemme normin asettamalla $\|(x,y)\|_{E\times F} := \|x\|_E + \|y\|_F$.

(i) Osoita, että $(E\times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ on normiavaruus.

(ii) Osoita, että $(E\times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ on Banach-avaruus mikäli sekä E että F ovat Banach-avaruuksia.

Ratkaisu 1.

Kohta (i). Pidetään tunnettuna, että $E\times F$ on vektoriavaruus. Tarkistetaan siis enää normin ehdot.

- Ehto (N1). Olkoon $(x,y), (x',y') \in E\times F$. Tällöin

$$\begin{aligned}\|(x,y)+(x',y')\|_{E\times F} &= \|(x+x', y+y')\|_{E\times F} = \|x+x'\|_E + \|y+y'\|_F \\ &\le \|x\|_E + \|x'\|_E + \|y\|_F + \|y'\|_F = \|(x,y)\|_{E\times F} + \|(x',y')\|_{E\times F}.\end{aligned}$$

  Siis ehto (N1) eli kolmioepäyhtälö toteutuu.

- Ehto (N2). Olkoon $(x,y)\in E\times F$ ja $\lambda\in\mathbb{K}$. Tällöin

$$\|\lambda(x,y)\|_{E\times F} = \|(\lambda x, \lambda y)\|_{E\times F} = \|\lambda x\|_E + \|\lambda y\|_F = |\lambda|(\|x\|_E + \|y\|_F) = |\lambda|\|(x,y)\|_{E\times F},$$

  joten ehto (N2) toteutuu.

- Ehto (N3). Selvästi $\|(0,0)\| = 0+0 = 0$. Toisaalta jos $(x,y)\in E\times F$ on sellainen, että

$$0 = \|(x,y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F,$$

  niin täytyy olla $x=0$ ja $y=0$. Siis $(x,y) = (0,0)$.

Kohta (ii). Olkoon $(x_n, y_n) \in E\times F$ sellainen jono vektoreita, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(x_n,y_n)\|_{E\times F} = \sum_{n=0}^{\infty} [\|x_n\|_E + \|y_n\|_F]$$

suppenee. Täten myös sarjat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|y_n\|_F$$

suppenevat. Koska avaruudet E ja F ovat Banachin avaruuksia, Lauseen 3.22 nojalla sarjat

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

suppenevat avaruuksissa E ja F. Merkitään näiden sarjojen summia X ja Y. Nyt

$$\|(X,Y)\|_{E\times F} - \sum_{n=0}^{N}(x_n,y_n)\|_{E\times F} = \|X - \sum_{n=0}^{N} x_n\|_E + \|Y - \sum_{n=0}^{N} y_n\|_F.$$

Oikean puolen termit lähestyvät nollaa, kun $N \to \infty$. Siis myös sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n, y_n)$$

suppenee avaruudessa $E \times F$ alkioon (X,Y). Lauseen 3.22 toisen suunnan nojalla $E \times F$ on siis Banachin avaruus.

2. **(i)** Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T : E \to F$ lineaarinen ja avoin kuvaus. Osoita, että T on surjektio.

(ii) Anna esimerkki normiavaruuksien välisestä jatkuvasta lineaarisesta surjektiosta joka ei ole bijektio.

Ratkaisu 2.

Kohta (i). Olkoon T lineaarinen ja avoin kuvaus. Koska T on avoin, se kuvaa avaruuden E avoimen yksikkökuulan $B_E(0,1)$ avoimeksi joukoksi $U = TB_E(0,1)$. Koska $T(0) = 0$, avaruuden F nollavektori kuuluu joukkoon U. Koska U on avoin, niin pallo $B_F(0,r)$ sisältyy joukkoon U sopivan pienellä $r > 0$.

Olkoon nyt $x \in F$ mielivaltainen. Merkitään $x' = \frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|_F}$. Tällöin $\|x'\|_F = r/2$, joten $x' \in B_F(0,r) \subset U$. Siis $x' = Ty$ jollain $y \in B_E(0,1)$. Mutta nyt

$$T\left(\frac{2\|x\|_F}{r} y\right) = \frac{2\|x\|_F}{r} Ty = \frac{2\|x\|_F}{r} x' = x.$$

Siis x on jonkin vektorin kuvavektori kuvauksessa T. Koska x oli mielivaltainen, niin T on surjektio.

Kohta (ii). Äärellisulotteisissa vektoriavaruuksissa pätee seuraava tulos: Jos $T : E \to F$ on surjektiivinen lineaarikuvaus, ja vektoriavaruuksilla E ja F on sama (äärellinen) dimensio, niin T on bijektio. Osoitetaan, että tämä ei välttämättä päde äärettömänulotteisissa avaruuksissa. Tämä antaa myös halutun vastaesimerkin.

Tutkitaan kuvausta $T : \ell^2 \to \ell^2$, joka määritellään kaavalla

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

On selvää, että T on surjektio. Toisaalta $T(1,0,0,\ldots) = (0,0,0,\ldots) = T(0,0,0,\ldots)$. Siis T ei ole injektio. Täten T ei myöskään ole bijektio.

3. Olkoon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ sellainen annettu reaalilukujen jono, että

$$\text{sarja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee kaikilla jonoilla } (x_k) \in c_0.$$

Näytä, että silloin $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^1$.

Ratkaisu 3. Kuten monisteen esimerkissä 7.7, määritellään kuvaukset $f_n : c_0 \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \quad \text{kun } x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}_+} \in c_0.$$

Kuvaukset f_n ovat selvästi lineaarisia, ja lisäksi pätee

$$|f_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right| \leq \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right) \|x\|_{\infty}.$$

Avaruudessa c_0 käytetään normia $\| \cdot \|_{\infty}$, joten tämä osoittaa että jokainen kuvaus f_n on rajoitettu kuvauksena $c_0 \to \mathbb{R}$. Itseasiassa saamme ylläolevasta operaattorinormille $\|f_n\|$ arvion

$$\|f_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Osoitetaan, että arviossa pätee myös yhtäsuuruus. Tätä varten määritellään kaikilla n jono $x^{(n)}$ seuraavasti

$$x^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{kun } k \leq n \text{ ja } a_k \geq 0 \\ -1, & \text{kun } k \leq n \text{ ja } a_k < 0 \\ 0, & \text{kun } k > n. \end{cases}.$$

Tällöin $x^{(n)} \in c_0$ kaikilla n ja

$$|f_n x^{(n)}| = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right) \|x^{(n)}\|_{\infty}.$$

Tämä osoittaa toisen suunnan operaattorinormin arviosta, joten saadaan

$$\|f_n\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Sovelletaan nyt Banach-Steinhausin lausetta lineaarikuvauksiin $\{f_n : n \geq 1\}$. Lauseen nojalla jompikumpi seuraavista tapauksista toteutuu.

Tapaus 1. On olemassa $M > 0$ siten, että

$$\|f_n\| \leq M$$

kaikilla $n \geq 1$. Siispä

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \|f_n\| \leq M$$

kaikilla $n \geq 1$. Mutta tästä arviosta seuraa, että myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

suppenee. Siis $(a_k) \in \ell^1$, joten tapauksessa 1 tehtävä on todistettu.

Tapaus 2. On olemassa $x \in c_0$ siten, että

$$\sup_{n \geq 1} |f_n(x)| = \infty \tag{1}$$

Toisaalta tehtävän oletuksen nojalla on olemassa raja-arvo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Siis jonon $f_n(x)$ täytyy olla rajoitettu, mikä on ristiriita ehdon (1) kanssa. Tehtävä on siis todistettu.

4. Olkoot E, F ja G Banach avaruuksia. Kuvaus $A : E \times F \to G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_1(y) : x \mapsto A(x, y)$ ja $A_2(x) : y \mapsto A(x, y)$ ovat lineaarisia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$.

Osoita, että bilineaarinen kuvaus A on *rajoitettu*, eli

$$\sup\{\|A(x, y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} < \infty,$$

jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_2(x) : F \to G$ ja $A_1(y) : E \to G$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$.

Ratkaisu 4.

Suunta 1. Oletetaan, että operaattorit $A_2(x)$ ovat jatkuvia ja lineaarisia kaikilla $x \in E$ ja operaattorit $A_1(y)$ ovat jatkuvia ja lineaarisia kaikilla $y \in F$.

Sovelletaan Banach-Steinhausin lausetta lineaarisiin kuvauksiin

$$\{A_2(x) : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

Lauseen nojalla jompikumpi seuraavista tapauksista toteutuu.

Tapaus 1. On olemassa $M > 0$ siten, että

$$\|A_2(x)\| \leq M$$

kaikilla $x \in E$, $\|x\|_E \leq 1$. Tällöin bilineaarinen kuvaus A on rajoitettu, sillä jos $(x, y) \in E \times F$, missä $\|x\|_E \leq 1$ ja $\|y\|_F \leq 1$, niin

$$\|A(x, y)\|_G = \|A_2(x)y\|_G \leq M\|y\|_G \leq M.$$

Siis tapauksessa 1 tehtävä on todistettu.

Tapaus 2. On olemassa $y \in F$ siten, että

$$\sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|A_2(x)y\|_G = \infty$$

Mutta $A_2(x)y = A(x, y) = A_1(y)x$. Koska $A_1(y)$ on rajoitettu lineaarinen kuvaus, niin

$$\|A_2(y)x\|_G \leq M_y\|x\|_E$$

jollain vakiolla $M_y > 0$. Siis

$$\sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|A_2(x)y\|_G = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|A_1(y)x\|_G \leq M_y < \infty.$$

Tämä on ristiriita, joten tapaus 2 on mahdoton.

Siispä A on rajoitettu bilineaarinen kuvaus.

Suunta 2. Oletetaan, että

$$\sup\{\|A(x, y)\|_G : \|x\|_E \leq 1, \|y\|_F \leq 1\} = M < \infty.$$

Olkoon $x \in E$ mielivaltainen. Tällöin

$$\begin{aligned}
\sup\{\|A_2(x)y\|_G : \|y\|_F \leq 1\} &= \sup\{\|A_2(x, y)\|_G : \|y\|_F \leq 1\} \\
&= \|x\|_E \sup\{\|A(x/\|x\|_E, y)\|_G : \|y\|_F \leq 1\} \\
&\leq M\|x\|_E,
\end{aligned}$$

sillä vektorin $x/\|x\|_E$ normi on 1. Siis operaattori $A_2(x)$ on rajoitettu. Vastaavasti nähdään, että $A_1(y)$ on rajoitettu kaikilla y.

5. Olkoon (y_k) jono Hilbertin avaruuden H vektoreita. Oletetaan, että jokaisella $x \in H$ on olemassa raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} (x|y_k).$$

Osoita, että $\sup_{k \geq 1} \|y_k\| < \infty$.

Ratkaisu 5.

Määritellään lineaariset kuvaukset $T_k : H \mapsto \mathbb{K}$ kaavalla $T_k x = (x|y_k)$. Jokainen kuvaus T_k on rajoitettu, sillä

$$|T_k x| = |(x, y_k)| \leq \|x\|_H \|y_k\|_H$$

Cauchy-Schwartzin nojalla. Siis operaattorinormille pätee $\|T_k\| \leq \|y_k\|_H$. Toisaalta $\|T_k\| \geq \|y_k\|_H$, sillä

$$|T_k y_k| = |(y_k|y_k)| = \|y_k\|_H^2.$$

Siis $\|T_k\| = \|y_k\|_H$ kaikilla k.

Sovelletaan nyt Banach-Steinhausin lausetta kuvauksiin T_k. Jompikumpi seuraavista tapauksista pätee.

Tapaus 1. On olemassa vakio $M > 0$ siten, että $\|T_k\| \leq M$ kaikilla k. Mutta nyt

$$\|y_k\|_H = \|T_k\| \leq M$$

kaikilla k, mikä oli todistettavana. Tapaus 1 johtaa siis haluttuun lopputulokseen.

Tapaus 2. On olemassa $x \in H$ siten, että

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |T_k x| = \infty.$$

Mutta tehtävän oletuksen nojalla on olemassa raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} (x|y_k) = \lim_{k\to\infty} T_k x.$$

Siis jonon $T_k x$ täytyy olla rajoitettu, mikä on ristiriita. Tapaus 2 johtaa siis ristiriitaan, joten väite on todistettu.

6*[1] Olkoon T integraalioperaattori, jolle

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy,$$

missä K on mitallinen ydinfunktio, jolle kuvaus $y \mapsto K(x,y)$ on integroituva jokaisella $x \in [0,1]$. Silloin Tf on pisteittäin hyvin määritelty ainakin jos $f \in L^\infty(0,1)$. Oletetaan, että K toteuttaa ns. *Schurin testin*: on olemassa ei-negatiiviset mitalliset funktiot $p, q : [0,1] \to \mathbb{R}$, joille pätee (joillakin vakioilla $A, B > 0$)

$$\int_0^1 |K(x,y)|p(y)dy \leq Aq(x) \qquad \text{kaikilla} \quad x \in [0,1]$$

ja

$$\int_0^1 |K(x,y)|q(x)dx \leq Bp(y) \qquad \text{kaikilla} \quad y \in [0,1].$$

Osoita, että tällöin T laajenee jatkuvaksi lineaariseksi operaattoriksi $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ ja sen normille pätee

$$\|T\| \leq \sqrt{AB}.$$

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Ratkaisu 6.

Tehtävä todistuu hieman monimutkaisella ketjulla arvioita, käyttäen Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä ja tehtävän oletuksia hyväksi. Olkoon $f \in L^\infty(0,1)$, tällöin

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_2^2 &= \int_0^1 |Tf(x)|^2\,dx \\
&= \int_0^1 \left|\int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|p(y)dy\right)\left(\int_0^1 \frac{|K(x,y)||f(y)|^2}{p(y)}dy\right)\cdot dx \\
&\leq \int_0^1 Aq(x)\left(\int_0^1 \frac{|K(x,y)||f(y)|^2}{p(y)}dy\right) dx \\
&= A\int_0^1\int_0^1 \frac{q(x)|K(x,y)||f(y)|^2}{p(y)}dydx \\
&= A\int_0^1\int_0^1 \frac{q(x)|K(x,y)||f(y)|^2}{p(y)}dxdy \\
&= A\int_0^1 \frac{|f(y)|^2}{p(y)}\int_0^1 q(x)|K(x,y)|dxdy \\
&\leq A\int_0^1 \frac{|f(y)|^2}{p(y)}Bp(y)dy \\
&= AB\int_0^1 |f(y)|^2dy \\
&= AB\|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Siis $\|Tf\|_2 \leq \sqrt{AB}\|f\|_2$ kaikilla $f \in L^\infty(0,1)$. Koska $L^\infty(0,1)$ on tiheässä avaruudessa $L^2(0,1)$, operaattori T laajenee jatkuvaksi lineaariseksi operaattoriksi myös avaruuteen $L^2(0,1)$.

Vihjeitä:

T.3: [Argumentoi kuten luennoilla tai muistiinpanojen Esimerkissä 7.7., käyttäen Banach-Steinhausin lausetta.]

T.4: [*Taikasana:* Banach-Steinhausin lause, eli tasaisen rajoituksen periaate.]

T.5: [Banach-Steinhausin lause ja sitä seuraava sovellus]