FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

7. HARJOITUKSET (pe 28.3, 12-14 salissa B322)

1. Anna esimerkki jatkuvista lineaarisista kuvauksista $S, T \in \mathcal{L}(E)$ (sopivassa Banach avaruudessa E), joille pätee $\|ST\|_E < \|S\|_E \|T\|_E$. Voitko valita $S = T$?

Ratkaisu 1.

Valitaan avaruudeksi $E = \ell^2$. Määritellään avaruudessa E kuvaus $T : E \to E$ seuraavasti. Jos $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in E$, niin

$$Tx = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots).$$

Tällöin on varsin helppo nähdä, että $\|T\|_E = 1$. Toisaalta pätee

$$T(Tx) = (0, 0, 0, \ldots)$$

kaikilla $x \in E$. Siis $T^2 = 0$. Epäyhtälö

$$0 = \|T^2\|_E \leq \|T\|_E^2 = 1.$$

on siis aito. Tämä antaa tehtävässä halutun esimerkin, missä lisäksi $S = T$.

2. Olkoon $g \in C(0, 1)$. Määritellään operaattori T_g asettamalla

$$T_g f(x) \ := \ g(x) f(x).$$

(i) Osoita, että $T_g \in \mathcal{L}(C(0, 1))$, eli että se on jatkuva lineaarinen operaattori avaruudelta $C(0, 1)$ itselleen.

(ii) Johda kaava normille $\|T_g\|$.

(iii) Milloin operaattori $T_g : C(0, 1) \to C(0, 1)$ on injektio?

(iv) Milloin operaattori $T_g : C(0, 1) \to C(0, 1)$ on kääntyvä ja mikä on sen käänteisoperaattori?

Ratkaisu 2.

Kohta (i). Ensinnäkin jatkuvien funktioiden kertolasku on jatkuva, joten T_g on hyvinmääritelty. Lineaarisuuden tarkistaminen on triviaalia, sillä pisteittäinen kertolasku $f(x) \mapsto g(x)f(x)$ on lineaarinen laskutoimitus. Hyväksytään siis, että T_g on lineaarinen operaattori ja osoitetaan sen jatkuvuus osoittamalla, että T_g on rajoitettu. Tätä varten tehdään arvio

$$\|T_g f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \cdot \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|g\|_\infty \|f\|_\infty,$$

mikä osoittaa että T_g on rajoitettu ja $\|T_g\| \leq \|g\|_\infty$.

Kohta (ii). Osoitetaan, että $\|T_g\| = \|g\|_\infty$. Tätä varten huomataan, että jos $f(x) = 1$ on vakiofunktio niin

$$\|T_g f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| = \|g\|_\infty = \|g\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Täten $\|T_g\| \geq \|g\|_\infty$. Tässä epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus, sillä kohdassa (i) todistettiin vastakkainen suunta.

Kohta (iii). Koitetaan päätellä milloin T_g on injektio. Olkoon $T_g f_1(x) = T_g f_2(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$. Tällöin

$$g(x)(f_1(x) - f_2(x)) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in [0,1].$$

Siis kaikilla x pätee $g(x) = 0$ tai $f_1(x) = f_2(x)$. Tästä voimme päätellä, että $f_1(x) = f_2(x)$ ainakin joukossa $\{x \in [0,1] : g(x) \neq 0\}$. Jos nyt $f_1(x) = f_2(x)$ pätee jossain välin $[0,1]$ tiheässä osajoukossa, niin jatkuvuuden nojalla $f_1(x) = f_2(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$. Siis jos joukko $\{x \in [0,1] : g(x) \neq 0\}$ on tiheässä välillä $[0,1]$, niin kuvaus T_g on injektio. Toisaalta jos joukko $\{x \in [0,1] : g(x) = 0\}$ sisältää avoimen välin, niin on helppo konstruoida kaksi jatkuvaa funktiota f_1 ja f_2 jotka ovat samoja kaikkialla muualla paitsi tällä avoimella välillä. Tällöin $T_g f_1 = T_g f_2$ joten T_g ei voi olla injektio.

Siis T_g on injektio jos ja vain jos joukko $\{x \in [0,1] : g(x) \neq 0\}$ on tiheässä välillä $[0,1]$.

Kohta (iv). Osoitetaan ensin, että jos $g(x_0) = 0$ jollain $x_0 \in [0,1]$ niin T_g ei ole kääntyvä. Kurssin Lauseen 6.9 nojalla jokainen kääntyvä operaattori on alhaalta rajoitettu, eli jos T_g on kääntyvä niin

$$\|T_g f\|_\infty \geq \alpha \|f\|_\infty$$

jollain vakiolla $\alpha > 0$ ja kaikilla $f \in C(0,1)$. Osoitetaan, että tällaista vakiota ei voi olla olemassa. Koska $g(x_0) = 0$, jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa väli $I_\epsilon = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mille $|g(x)| \leq \epsilon$ kaikilla $x \in I_\epsilon \cap [0,1]$. Olkoon nyt f_ϵ jatkuva funktio, jolle pätee $f_\epsilon(x) = 0$ kun $x \notin I_\epsilon$ ja $\|f_\epsilon\|_\infty = 1$. Tällöin

$$\alpha \|f_\epsilon\|_\infty \leq \|T_g f_\epsilon\|_\infty = \sup_{x \in I_\epsilon \cap [0,1]} |g(x) f(x)| \leq \epsilon.$$

Siis $\alpha \leq \epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$, mikä on ristiriita. Täten T_g ei ole kääntyvä.

Toisaalta jos $g(x) \neq 0$ kaikilla $x \in [0,1]$, niin myös funktio $1/g(x)$ kuuluu avaruuteen $C(0,1)$. Täten kuvaus $T_{1/g}$ on jatkuva lineaarinen kuvaus avaruudelta $C(0,1)$ itselleen. Helposti nähdään, että $T_g T_{1/g} f = T_{1/g} T_g f = f$ kaikilla $f \in C(0,1)$, joten $T_{1/g}$ on operaattorin T_g käänteiskuvaus. Siis T_g on kääntyvä jos ja vain jos $g(x) \neq 0$ kaikilla $x \in [0,1]$.

3. Olkoon $1 \leq p \leq \infty$. Esitä jokin isomorfismi $T : L^p(0,1) \to E$ kun
a) $E = L^p(-2,2)$, ja b) $E = L^p(0,\infty)$.

Ratkaisu 3.

Kohta a). Etsitään ensin bijektio $h : [-2,2] \to [0,1]$. Voidaan valita h lineaariseksi kuvaukseksi

$$h(x) = \frac{x+2}{4}.$$

Olkoon nyt $1 \le p < \infty$ annettu. Jos $f \in L^p(0,1)$, niin muuttujanvaihtokaavan nojalla

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(0,1)} &= \int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_{-2}^2 |f(h(x))|^p h'(x) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left| f\left(\frac{x+2}{4}\right)\right|^p \frac{1}{4} dx = \int_{-2}^2 \left| \frac{1}{4^{1/p}} f\left(\frac{x+2}{4}\right)\right|^p dx.\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että $\|f\|_{L^p(0,1)} = \|Tf\|_{L^p(-2,2)}$ kaikilla $f \in L^p(0,1)$, kun kuvaus $T : L^p(0,1) \to L^p(-2,2)$ määritellään kaavalla

$$Tf(x) = \frac{1}{4^{1/p}} f\left(\frac{x+2}{4}\right).$$

On helppo tarkistaa, että T on lineaarinen kuvaus $T : L^p(0,1) \to L^p(-2,2)$. Se on rajoitettu normilla $\|T\| = 1$ koska se pitää L^p-normin ennallaan. Lisäksi sille on helppo löytää käänteiskuvaus

$$T^{-1} f(x) = 4^{1/p} f(4x+2).$$

Ja tämä käänteiskuvaus on myös lineaarinen ja rajoitettu. Siis T on lineaarinen isomorfismi.

Tapauksessa $p = \infty$ valitaan kuvaus $T : L^\infty(0,1) \to L^\infty(-2,2)$ ja sen käänteiskuvaus kaavoilla

$$Tf(x) = f\left(\frac{x+2}{4}\right) \quad \text{ja} \quad T^{-1} f(x) = f(4x+2).$$

Nämä lineaariset kuvaukset selvästi pitävät L^∞-normin ennallaan ja ovat toistensa käänteiskuvauksia.

Kohta b). Kuten kohdassa a), valitaan ensin jokin bijektio $h : (0,\infty) \to (0,1)$. Voidaan esimerkiksi valita

$$h(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Jos $1 \le p < \infty$ ja $f \in L^p(0,1)$, niin

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(0,1)} &= \int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_\infty^0 |f(h(x))|^p h'(x) dx \\ &= \int_0^\infty \left| f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right|^p \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_0^\infty \left| \frac{1}{(x+1)^{2/p}} f\left(\frac{x+2}{4}\right)\right|^p dx.\end{aligned}$$

Tällöin kuvaukselle $T : L^p(0,1) \to L^p(0,\infty)$ joka määritellään kaavalla

$$Tf(x) = \frac{1}{(x+1)^{2/p}} f\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

pätee $\|f\|_{L^p(0,1)} = \|Tf\|_{L^p(0,\infty)}$ kaikilla $f \in L^p(0,1)$. On jälleen helppo tarkistaa kuvauksen T lineaarisuus ja rajoittuneisuus. Sille löytyy myös käänteiskuvaus kaavalla

$$T^{-1}f(x) = \frac{1}{x^{2/p}} f\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Sillä nyt

$$\begin{aligned}
TT^{-1}f(x) &= T\left[\frac{1}{t^{2/p}} f\left(\frac{1}{t} - 1\right)\right](x) \\
&= \frac{1}{(x+1)^{2/p}} \frac{1}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^{2/p}} f\left(\frac{1}{\frac{1}{x+1}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{(x+1)^{2/p}} (x+1)^{2/p} f(x+1-1) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Vastaavasti $T^-1Tf = f$ kaikilla f. Siis T on lineaarinen isomorfismi.

Tapauksessa $p = \infty$ valitaan taas yksinkertaisesti

$$Tf(x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) \qquad \text{ja} \qquad T^{-1}f(x) = f\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

4. Olkoon E Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(E)$ operaattori jolle $\|T^{k_0}\| < 1$ jollakin $k_0 \geq 2$. Yleistä Neumannin sarjaa koskeva lause yleistys, osoittamalla että myös tällöin $\mathrm{I} - T$ on kääntyvä (vrt. luentomonisteen lause 6.18) ja käänteisoperattorilla on esitys suppenevana sarjana

$$(\mathrm{I} - T)^{-1} \;=\; \mathrm{I} + T + T^2 + T^3 + \dots.$$

Ratkaisu 4.

Olkoon $T \in \mathcal{L}(E)$ operaattori jolle $\|T^{k_0}\| < 1$ jollakin $k_0 \geq 2$. Osoitetaan, että sarja

$$\mathrm{I} + T + T^2 + T^3 + \cdots$$

suppenee operaattorinormin suhteen. Merkitään $s = \|T^{k_0}\| < 1$. Jos n on positiivinen kokonaisluku, niin kirjoitetaan sille jakoyhtälö $n = qk_0 + r$, missä $q \geq 0$ ja $0 \leq r < k_0$. Tällöin

$$\|T^n\| = \|T^{qk_0+r}\| \leq \|T^{qk_0}\|\|T^r\| \leq \|T^{k_0}\|^q\|T^r\| = s^q\|T^r\|.$$

Jos merkitään vielä $M = \sup_{0 \leq r < k_0} \|T^r\|$, niin tästä saadaan arvio

$$\|T^n\| \leq Ms^q. \tag{1}$$

Voimme nyt arvioida sarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ seuraavasti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k_0-1} \|T^{qk_0+r}\| \leq \sum_{q=0}^{\infty} k_0 M s^q.$$

Oikeanpuolimmaisin sarja suppenee, sillä $s < 1$. Siis myös sarja

$$\mathrm{I} + T + T^2 + T^3 + \cdots$$

suppenee, koska se suppenee itseisesti ja rajoitetut operaattorit muodostavat Banachin avaruuden. Merkitään tätä sarjaa symbolilla S ja sen osasummia

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} T^n.$$

Huomataan, että

$$(\mathrm{I} - T)S_N = \mathrm{I} - T^{N+1}$$

Arvion (1) perusteella $\|T^{N+1}\| \to 0$, kun $N \to \infty$. Oikea puoli ylläolevassa yhtälössä suppenee siis kohti operaattoria I. Vasen puoli taas suppenee kohti operaattoria $(1 - T)S$, joten

$$(\mathrm{I} - T)S = \mathrm{I}.$$

Vastaavasti identiteetistä

$$S_N(\mathrm{I} - T) = \mathrm{I} - T^{N+1}$$

nähdään, että

$$S(\mathrm{I} - T) = \mathrm{I}.$$

Siis operaattori $\mathrm{I} - T$ on kääntyvä, ja sen käänteisoperaattori on S.

5. Olkoon $T \in \mathcal{L}(H)$ Hilbertin avaruuden H jatkuva operaattori, jolle pätee

$$|(Tx|x)| \geq c\|x\|^2$$

Näytä, että T on kääntyvä operaattori.

Ratkaisu 5.

Osoitetaan ensin, että T on alhaalta rajoitettu. Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$c\|x\|^2 \leq |(Tx|x)| \leq \|Tx\|\|x\|.$$

Siispä $c\|x\| \leq \|Tx\|$ kaikilla $x \in H \setminus \{0\}$. Tämä arvio pätee myös kun $x = 0$.

Nyt on helppo osoittaa että T on injektio, sillä jos $Tx = Ty$ niin $\|x-y\| \leq c^{-1}\|Tx-Ty\| = 0$, mistä seuraa $x = y$.

Osoitetaan operaattorin T surjektiivisuus. Näytetään ensin, että kuva-avaruus $\operatorname{Im} T$ on suljettu. Olkoon $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Im} T$ jono vektoreita, joille $v_n \to v \in \mathbb{H}$ kun $n \to \infty$. Osoitetaan, että $v \in \operatorname{Im} T$. Tätä varten valitaan jokaisella n jokin $x_n \in H$ siten, että $Tx_n = v_n$. Koska T on alhaalta rajoitettu, niin

$$\|x_n - x_m\| \leq c^{-1}\|Tx_n - Tx_m\| = c^{-1}\|v_n - v_m\|.$$

Koska vektorit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muodostavat Cauchy jonon, näemme tästä arviosta että myös jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchy. Siis $x_n \to x$ kun $n \to \infty$ jollain $x \in H$. Mutta koska T on jatkuva, niin

$$Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

Siis $v \in \operatorname{Im} T$. Täten operaattorin T kuva-avaruus on suljettu.

Osoitetaan nyt, että kuva-avaruuden $\operatorname{Im} T$ ortokomplementti on triviaali. Tämä osoittaa, että $\operatorname{Im} T = H$, sillä jokainen H:n vektori voidaan ilmaista suljetun aliavaruuden $\operatorname{Im} H$ ja sen ortokomplementin jäsenien summana. Jos $x \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$, niin $(x, v) = 0$ kaikilla $v \in \operatorname{Im} T$. Tällöin

$$c(x, x) \leq |(x, Tx)| = 0.$$

Mistä voimme päätellä, että $x = 0$. Siis $(\operatorname{Im} T)^{\perp} = \{0\}$. Täten T on surjektio.

Koska T on injektio ja surjektio, sillä on käänteiskuvaus T^{-1}. Tämä kuvaus on lineaarinen, sillä lineaarisen kuvauksen käänteiskuvaus on aina myös lineaarinen. Osoitetaan vielä, että T^{-1} on rajoitettu. Olkoon $x \in H$. Merkitään $y = T^{-1}x$. Koska T on alhaalta rajoitettu, niin

$$\|T^{-1}x\| = \|y\| \leq c^{-1}\|Ty\| = c^{-1}\|TT^{-1}x\| = c^{-1}\|x\|.$$

Siis T^{-1} on rajoitettu, eli T on kääntyvä.

6* Osoita, etteivät avaruudet ℓ^1 ja ℓ^2 ole keskenään isomorfiset. Tee se kahdessa vaiheessa:

(i) Osoita induktiolla n:n suhteen suunnikasyhtälön yleistys:, kaikilla avaruuden ℓ^2 vektoreilla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pätee

$$\sum_{\pm} \|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n\|_{\ell^2}^2 = 2^{n-1}\big(\|x_1\|_{\ell^2}^2 + \|x_2\|_{\ell^2}^2 + \ldots + \|x_n\|_{\ell^2}^2\big).$$

Vasemmalla puolella summataan yli kaikkien mahdollisten etumerkkien valintojen, eli summassa on 2^{n-1} termiä

(ii) vastaoletuksen mukaan on olemassa lineaarinen jatkuva ja kääntyvä kuvaus $T : \ell^1 \to \ell^2$, jolloin erityisesti jollakin positiivisella vakiolla $C > 0$ pätee

$$C^{-1}\|x\|_{\ell^1} \leq \|Tx\|_{\ell^2} \leq C\|x\|_{\ell^1} \qquad \text{kaikilla} \quad x \in \ell^1.$$

Sovella kohdan (i) identiteettiä vektoreihin $x_k := Te_k$, $1 \leq k \leq n$, missä e_k on avaruuden ℓ^1 k:s yksikkövektori. Johda ristiriita riittävän suurilla n.

Ratkaisu 6.

Kohta (i). Todistetaan induktiolla tehtävän identiteetti. Alkutapauksessa $n = 2$ identiteetti palaa muotoon

$$\|x_1 + x_2\|_{\ell^2}^2 + \|x_1 - x_2\|_{\ell^2}^2 = 2\left(\|x_1\|_{\ell^2}^2 + \|x_2\|_{\ell^2}^2\right),$$

joka on tavallinen suunnikasyhtälö.

Oletetaan nyt, että väite pätee tapauksessa n ja tehdään induktioaskel. Jos vektorit $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \ell^2$ on annettu, niin tavallisen suunnikasyhtälön nojalla pätee

$$\|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n + x_{n+1}\|_{\ell^2}^2 + \|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n - x_{n+1}\|_{\ell^2}^2 = 2\left(\|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n\|_{\ell^2}^2 + \|x_{n+1}\|_{\ell^2}^2\right),$$

missä merkkien $\pm$ valinta on sama jokaisessa lausekkeen $x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$ esiintymässä. Summaamalla yli kaikkien näiden valintojen saadaan

$$\sum_{\pm} \|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n \pm x_{n+1}\|_{\ell^2}^2 = 2\left(\sum_{\pm} \|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n\|_{\ell^2}^2 + \sum_{\pm} \|x_{n+1}\|_{\ell^2}^2\right).$$

Tässä summat $\sum_{\pm}$ käyvät läpi kaikki 2^{n-1} mahdollista etumerkkien valintaa. Erityisesti $\sum_{\pm} \|x_{n+1}\|_{\ell^2}^2 = 2^{n-1}\|x_{n+1}\|_{\ell^2}^2$. Soveltamalla vielä induktio-oletusta saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{\pm} \|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n \pm x_{n+1}\|_{\ell^2}^2 &= 2\left(2^{n-1}\left[\|x_1\|_{\ell^2}^2 + \|x_2\|_{\ell^2}^2 + \ldots + \|x_n\|_{\ell^2}^2\right] + 2^{n-1}\|x_{n+1}\|_{\ell^2}^2\right) \\ &= 2^n\left(\|x_1\|_{\ell^2}^2 + \|x_2\|_{\ell^2}^2 + \ldots + \|x_n\|_{\ell^2}^2 + \|x_{n+1}\|_{\ell^2}^2\right).\end{aligned}$$

Tämä on haluttu identiteetti tapauksessa $n + 1$, joten induktiotodistus on valmis.

Kohta (ii). Tehdään vastaoletus että on olemassa lineaarinen isomorfismi $T : \ell^1 \to \ell^2$. Erityisesti on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$C^{-1}\|x\|_{\ell^1} \leq \|Tx\|_{\ell^2} \leq C\|x\|_{\ell^1} \qquad \text{kaikilla} \quad x \in \ell^1.$$

Olkoon jokaisella k vektori e_k avaruuden ℓ^1 standardi yksikkövektori (siis $e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, missä ykkönen on kohdassa k). Merkitään $x_k = Te_k$ Tällöin

$$\begin{aligned}
\|x_1\|_{\ell^2}^2 + \|x_2\|_{\ell^2}^2 + \ldots + \|x_n\|_{\ell^2}^2 &= \|Te_1\|_{\ell^2}^2 + \|Te_2\|_{\ell^2}^2 + \ldots + \|Te_n\|_{\ell^2}^2 \\
&\leq C^2 \left(\|e_1\|_{\ell^1}^2 + \|e_2\|_{\ell^1}^2 + \ldots + \|e_n\|_{\ell^1}^2 \right) \\
&= nC^2
\end{aligned}$$

Toisaalta jokaisella merkkien $\pm$ valinnoilla pätee

$$\begin{aligned}
\|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n\|_{\ell^2}^2 &= \|T\left(e_1 \pm e_2 \pm \ldots \pm e_n\right)\|_{\ell^2}^2 \\
&\geq C^{-2}\|e_1 \pm e_2 \pm \ldots \pm e_n\|_{\ell^1}^2 \\
&= n^2 C^{-2}.
\end{aligned}$$

Summaamalla yli kaikkien etumerkkien valintojen ja käyttämällä suunnikasepäyhtälön yleistystä, voimme päätyä arvioon

$$2^{n-1} n C^2 \geq 2^{n-1} n^2 C^{-2}$$

kaikilla $n \geq 1$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $C^4 \geq n$. Tämä epäyhtälö ei päde riittävän suurilla n, joten saadaan ristiriita. Siis avaruudet ℓ^1 ja ℓ^2 eivät ole lineaarisesti isomorfiset.