FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

6. HARJOITUKSET (ti 11.3, 10-12 salissa C124, HUOM AIKA JA PAIKKA!)

1. Kurssikoe Ke 12.3 9-12 salissa C124

1. Olkoon $M = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$.

(i) Määrää ortokomplementti $M^\perp$ avaruudessa $L^2(0,1)$.

(ii) Laske funktion $g(x) = e^x$ etäisyys aliavaruudesta M.

Ratkaisu 1.

Kohta (i). Huomataan ensin, että vakiofunktiot kuuluvat ortokomplementtiin $M^\perp$. Tämä johtuu siitä, että jos c on vakio ja $f \in M$, niin

$$(f|c) = \int_0^1 f(x)\overline{c}dx = \overline{c}\int_0^1 f(x)dx = \overline{c} \cdot 0 = 0.$$

Siis ortokomplementti sisältää ainakin vakiofunktiot. Osoitetaan, että se ei sisällä muuta. Tämä onnistuu löytämällä jokaiselle funktiolle $g \in L^2(0,1)$ esitys $g = f + c$, missä $f \in M$ ja c on vakio. Valitaankin $c = \int_0^1 g(x)dx$ ja $f(x) = g(x) - c$. Tällöin

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (g(x) - c)dx = \int_0^1 g(x)dx - c = 0,$$

joten $f \in M$ ja haluttu esitys on löydetty.

Voidaan nyt osoittaa, että ortokomplementtiin ei sisälly muita alkioita kun vakioita. Olkoon $g \in M^\perp$. Esitetään g muodossa $g = f + c$ kuten edellä. Koska $g \in M^\perp$, täytyy olla $f = 0$. Mutta tällöin $g = c$ on vakio. Siis $M^\perp = \{c : c \in \mathbb{K}\}$.

Kohta (ii). Olkoon $g(x) = e^x$. Tällöin $\int_0^1 g(x)dx = e - 1$. Siis g voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$g(x) = (e^x - (e-1)) + (e-1),$$

missä $e^x - (e-1) \in M$ ja $e - 1 \in M^\perp$. Tästä voidaan lukea, että funktion g projektio aliavaruudelle M on $P_M g(x) = e^x - (e-1)$. Siis funktion g etäisyys aliavaruudesta M on

$$\|g - P_M g\|_2 = \|e - 1\|_2 = e - 1.$$

2. Osoita, käyttäen sopivaa Dirichlet-ytimen D_n määritelmää, että kuvaus $f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x-t)f(t)dt$ on projektio äärellisulotteiselle $L^2(0,2\pi)$:n aliavaruudelle. Mikä kyseinen aliavaruus on?

Ratkaisu 2.

Dirichlet'n ydin määriteltiin luentomonisteessa kaavalla

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Merkitään $e_k(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$, jolloin $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ on avaruuden $L^2(0,2\pi)$ ortonormaali kanta Seurauksen 5.8 nojalla. Muokataan nyt tehtävänannon lauseketta seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x-t)f(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} f(t)dt \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ikt}f(t)dt \\
&= \sum_{k=-n}^{n} e_k(x)\int_0^{2\pi} \overline{e_k(t)}f(t)dt \\
&= \sum_{k=-n}^{n} (f|e_k)e_k(x)
\end{aligned}$$

Huomataan, että ylläoleva kaava vastaa luentomonisteen Lauseen 4.34b) antamaa kaavaa ortonormaalille projektiolle. Tästä seuraa, että D_n on projektio vektoreiden e_k, $k = -n, -(n-1), \dots, n-1, n$ virittämälle aliavaruudelle.

3. Jos $f(x)$ on jatkuvasti derivoituva 2π-periodinen funktio, osoita että silloin $\widehat{(f')}(n) = in\widehat{f}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Ratkaisu 3.

Olkoon f jatkuvasti derivoituva ja 2π-periodinen. Tällöin voimme soveltaa osittaisintegrointia ja todistaa tehtävän identiteetti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\widehat{(f')}(n) = (f'|e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}dx = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
= in(f|e_n) = in\widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

4. Olkoon $f(x)$ jatkuvasti derivoituva 2π-periodinen funktio. Osoita, että f:n Fourier sarja suppenee itseisesti.

Ratkaisu 4.

Tutkitaan ensin derivaatan f' Fourier-kertoimia $\widehat{(f')}(n)$. Parsevalin kaavan nojalla

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{(f')}(n)\right|^2 = \|f'\|_2^2.$$

Siis sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{(f')}(n)\right|^2$ suppenee. Tehtävän 3 identiteetin nojalla pätee

$$\widehat{(f')}(n) = in\widehat{f}(n)$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Siispä Cauchy-Schwarzin nojalla

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{f}(n)| \\
&= |\widehat{f}(0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\left|\widehat{(f')}(n)\right|}{|n|} \\
&\leq |\widehat{f}(0)| + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\widehat{(f')}(n)\right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Molemmat summat oikealla puolella ovat äärellisiä, joten myös sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|$ suppenee.

5. Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ sellainen funktio, että Fourier sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$ suppenee itseisesti.

(i) Osoita, että Fourier osasummat suppenevat tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota $g \in C(0, 2\pi)$, eli $s_n(f; x) \to g(x)$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$, kun $n \to \infty$.

(ii) Lue luentomonisteesta Seuraus 5.5 (s. 95). Osoita sen avulla, että $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in [0, 2\pi]$.

(iii) Totea erityisesti, että jatkuvan funktion Fourier-kertoimet määräävät kyseisen funktion yksikäsitteisesti.

Ratkaisu 5.

Kohta (i). Osoitetaan, että Fourier-osasummat muodostavat Cauchy-jonon sup-normin suhteen. Merkitään Fourier-osasummia

$$s_N(f, x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

Merkitään lisäksi

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \left|\widehat{f}(n)\right|.$$

Kun $M > N$ niin voimme arvioida että

$$\begin{aligned}
|s_M(f,x) - s_N(f,x)| &= \left| \sum_{n=-M}^{-(M-N)} \widehat{f}(n) e^{inx} + \sum_{n=M-N}^{M} \widehat{f}(n) e^{inx} \right| \\
&\leq \sum_{n=-M}^{-(M-N)} \left| \widehat{f}(n) \right| + \sum_{n=M-N}^{M} \left| \widehat{f}(n) \right| \\
&= S_M(f) - S_N(f).
\end{aligned}$$

Siispä

$$\|s_M(f,x) - s_N(f,x)\|_\infty \leq S_M(f) - S_N(f).$$

Koska sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(n) \right|$ suppenee itseisesti, osasummat $S_N(f)$ muodostavat Cauchy-jonon. Ylläolevan arvion perusteella funktiot $s_N(f,x)$ muodostavat siis myös Cauchy-jonon avaruudessa $C(0,1)$ sup-normin suhteen (jokainen osasumma on jatkuva funktio). Koska tämä avaruus on Banach, niin funktiot $s_N(f,x)$ suppenevat kohti jotain funktiota $g(x) \in C(0,2\pi)$ sup-normin suhteen.

Kohta (ii). Funktiot $s_N(f,x)$ suppenevat kohti funktiota f avaruudessa $L^2(0,2\pi)$ ja kohti funktiota g avaruudessa $C(0,2\pi)$. Toisaalta L^2-normille pätee arvio

$$\|h\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |h(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{2\pi} \|h\|_\infty,$$

joten myös

$$\|g - s_N(f,\cdot)\|_2 \to 0$$

kun $N \to \infty$. Siis funktiot $s_N(f,x)$ suppenevat myös kohti funktiota g avaruudessa $L^2(0,2\pi)$. Raja-arvon yksikäsitteisyydestä seuraa $f(x) = g(x)$ m.k. $x \in [0,2\pi]$.

Kohta (iii). Tämä kohta on hieman epäselvästi aseteltu ja irrallinen muista. Koska $e_n(x) = e^{\pi inx}/\sqrt{2\pi}$ on Hilbertin kanta avaruudelle $L^2(0,2\pi)$, jokaisen L^2-funktion Fourier-kertoimet määräävät sen yksikäsitteisesti melkein kaikkialla. Lisäksi jos L^2-funktiolla on jatkuva edustaja niin se on yksikäsitteinen, sillä jos f ja g ovat jatkuvia funktioita joille $f(x) = g(x)$ m.k. niin $f - g$ on jatkuva funktio joka on nolla m.k. eli $f - g$ on identtisesti nolla.

6^{*1} Avaruuden $L^2(-1,1)$ funktiota f sanotaan parilliseksi, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in [-1,1]$ ja parittomaksi, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla $x \in [-1,1]$.

(i) Osoita, että parillisten funktioiden ja parittomien funktioiden joukot ovat toistensa ortokomplementteja avaruudessa $L^2(-1,1)$.

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

(ii) Osoita, että jokainen parillinen funktio f avaruudessa $L^2(-1,1)$ voidaan kirjoittaa (L^2-mielessä) sarjana

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\pi n x).$$

Ratkaisu 6.

Kohta (i). Tarkistetaan ensin, että parilliset ja parittomat funktiot ovat ortogonaalisia toisiaan vasten. Olkoon f parillinen ja g pariton. Tällöin

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx = -\int_{1}^{-1} f(-x)\overline{g(-x)}dx = -\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx = -(f|g).$$

Siis $(f|g) = 0$. Riittää nyt osoittaa, että jokaisen funktion $h \in L^2(-1,1)$ voi esittää muodossa $h = f + g$, missä f on parillinen ja g pariton. Valitaan tätä varten

$$f(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} \quad \text{ja} \quad g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}.$$

Tällöin $h(x) = f(x) + g(x)$ ja on helppo tarkistaa, että f on parillinen ja g pariton. Siis parillisten ja parittomien funktioiden joukot muodostavat ortogonaaliset joukot jotka virittävät koko avaruuden $L^2(-1,1)$, eli ne ovat toistensa ortokomplementteja.

Kohta (ii). Palautetaan mieleen Seuraus 5.8, joka sopivalla skaalauksella antaa, että funktiot $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi i n x}$ muodostavat ortonormaalin kannan avaruudelle $L^2(-1,1)$. Jokainen funktio $f \in L^2(-1,1)$ voidaan siis esittää L^2-mielessä sarjana

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\pi i n x}.$$

Jos funktio f on parillinen, niin $f(x) = (f(x) + f(-x))/2$. Täten

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\pi i n x} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-\pi i n x} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{1}{2}\left(e^{\pi i n x} + e^{-\pi i n x}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} i c_n \cos(\pi i n x), \end{aligned}$$

missä käytimme kosinin määritelmää $\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$. Tämä todistaa tehtävän väitteen.

Vihjeitä:

T.1: [Kohdassa (i) etsi funktioille $f \in L^2(0,1)$ yksikäsitteinen esitys $f = f_1 + f_2$, missä $f_1 \in M$ ja $f_2 \in M^{\perp}$.]

T.3: [Osittaisintegrointi!]

T.4: [Hyödynnä Tehtävää 3, ja arvioi sarjaa $\sum |\widehat{f}(n)|$ Cauchy-Schwarzin avulla.]