FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

5. MALLIVASTAUKSET (pe 28.2, 12-14 salissa B322)

1. Jono $e_n(t) = e^{2\pi int} = (\cos(nt) + i\sin(nt))$, $n \in \mathbb{Z}$, on ortonormaali avaruudessa $L^2(0,1)$. Laske funktion $g(t) = t$ Fourier kertoimet $(g|e_n)$. Kirjoita tilannetta vastaava Besselin epäyhtälö.

Ratkaisu 1.

Lasketaan Fourier-kertoimet osittaisintegroimalla. Kun $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}(g|e_n) &= \int_0^1 t\overline{e^{2\pi int}}dt = \int_0^1 te^{-2\pi int}dt \\ &= \Big/_0^1 \frac{1}{-2\pi in}te^{-2\pi int} - \int_0^1 \frac{1}{-2\pi in}e^{-2\pi int}dt \\ &= \frac{-1}{2\pi in} - \Big/_0^1 \frac{1}{(-2\pi in)^2}e^{-2\pi int} = \frac{-1}{2\pi in} - 0 \\ &= \frac{i}{2\pi n}.\end{aligned}$$

Kun taas $n = 0$:

$$(g|e_0) = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}.$$

Besselin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(g|e_n)|^2 \leq \|g\|_{L^2}^2.$$

Helposti lasketaan, että $\|g\|_{L^2}^2 = 1/3$. Siis

$$\frac{1}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Tästä voimme päätellä, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6}.$$

Myöhemmin (oleellisesti Seuraus 5.8) osoitetaan, että jono e_n on itseasiassa ortonormaali kanta avaruudessa $L^2(0,1)$. Tästä seuraa, että Besselin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus, joten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Siispä vaikean näköisillekin summille voi laskea tarkkoja arvoja käyttämällä Fourier-analyysiä.

2. Olkoon M Hilbertin avaruuden E aliavaruus. Osoita, että aina

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}.$$

Ratkaisu 2.

Osoitetaan ensin, että $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Olkoon $x \in M$ mielivaltainen, ja $y \in M^{\perp}$ mielivaltainen. Käytetään joukon $M^{\perp}$ määritelmää alkioon y. Tällöin pätee että $(x|y) = 0$. Toisaalta koska tämä pätee kaikilla $y \in M^{\perp}$, voimme joukon $(M^{\perp})^{\perp}$ määritelmän nojalla päätellä, että $x \in (M^{\perp})^{\perp}$. Koska x oli mielivaltainen, niin $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

Käytetään nyt monisteen Lausetta 4.19, jonka mukaan jokaisen joukon ortokomplementti on suljettu. Siis joukko $(M^{\perp})^{\perp}$ on suljettu. Koska $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$, pätee tällöin myös $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

Todistetaan nyt pieni välitulos, jonka mukaan $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$. Selvästi $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$, sillä $M \subset \overline{M}$. Toisaalta jos $y \in M^{\perp}$ ja $x \in \overline{M}$, niin on olemassa jono $(x_n) \subset M$ siten, että $x_n \to x$ avaruudessa E. Tällöin myös

$$(x_n|y) \to (x|y) \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Mutta koska $(x_n|y) = 0$ kaikilla n, myös $(x|y) = 0$. Koska x oli mielivaltainen, niin $y \in \overline{M}^{\perp}$. Siis $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$.

Osoitetaan nyt vielä, että $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$. Koska $\overline{M}$ on Hilbertin avaruuden E suljettu aliavaruus, voidaan jokainen sen vektori x hajoittaa yksikäsitteisesti summaksi $x = u + v$, missä $u \in \overline{M}$ ja $v \in \overline{M}^{\perp}$. Oletetaan, että $x \in (M^{\perp})^{\perp}$. Jos x hajoitetaan muotoon $x = u+v$ kuten yllä, niin $v \in \overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$. Toisaalta $x \in (M^{\perp})^{\perp}$, joten $(x|v) = 0$. Siis

$$0 = (x|v) = (u + v|v) = (u|v) + (v|v) = \|v\|^2,$$

sillä $(u|v) = 0$. Täten $v = 0$, joten $x = u \in \overline{M}$. Siispä $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$.

3. Mikäli Hilbertin avaruuden alkiolle x ja jonolle (x_n) pätee

$$(x_n|y) \to (x|y) \quad \text{kaikilla} \quad y \in E,$$

niin sanomme että x_n suppenee kohti alkiota x <u>heikosti</u> avaruudessa E.

(i) Olkoon (e_n) ON-jono E:ssä. Osoita, että $e_n \to \overline{0}$ heikosti kun $n \to \infty$.

(ii) Totea, että kohdan (i) nojalla heikko suppeneminen ei implikoi normikonvergenssia. Osoita kuitenkin, että jos jono (x_n) suppenee kohti vektoria x heikosti ja lisäksi $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, niin silloin $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Ratkaisu 3.

Kohta (i). Olkoon $y \in E$ mielivaltainen. Besselin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n|y)|^2 \leq \|y\|_E^2.$$

Siis sarja $\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n|y)|^2$ suppenee, mistä seuraa että sen termit lähestyvät nollaa kun $n\to\infty$. Siis $(e_n|y)\to 0=(0|y)$ kun $n\to\infty$. Määritelmän nojalla siis $e_n\to 0$ heikosti, mikä oli todistettava.

Kohta (ii). Jos jono x_n suppenee kohti vektoria x heikosti, niin erityisesti $(x_n,x)\to(x,x)=\|x\|^2$. Tehtävän HARJ4/3 nojalla jos lisäksi $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$, niin silloin myös $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, kuten haluttiin.

4. Tässä tehtävässä tarkastellaan Hilbertin avaruutta $L^2(0,1)$.

(i) Esim. sovella Gram-Schmidtin ortogonalisointia, ja etsi ortonormaali kanta joukon

$$M:=\{1,x,x^2\}$$

virittämälle aliavaruudelle

(ii) Mikä on funktion x^3 etäisyys aliavaruudesta M, eli ratkaise minimointitehtävä

$$\min_{a,b,c}\int_0^1|a+bx+cx^2-x^3|^2dx$$

(iii) Totea, että projektio $P_M:L^2(0,1)\to M$ voidaan kirjoittaa integraalioperaattorina

$$P_Mf(x)=\int_0^1K(x,y)f(y)dy.$$

Mikä on ytimen K eksplisiittinen lauseke?

Ratkaisu 4.

Tässä tehtävässä muistetaan, että avaruuden $L^2(0,1)$ sisätulo määritellään kaavalla

$$(f|g)=\int_0^1f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Kohta (i). Sovelletaan Gram-Schmidtin ortogonalisointia. Vektorin $e_1(x)=1$ normi on yksi, joten valitaan se ortonormaalin jonon ensimmäiseksi jonoksi. Koitetaan nyt löytää sille ortogonaalinen vektori joukosta $\text{span}\{e_1,x\}$. Yksi tällainen vektori on

$$\widehat{e_2}(x)=x-(x|e_1)e_1=x-\int_0^1xdx=x-\frac{1}{2},$$

sillä nyt $(\widehat{e_2}|1)=(x-(x|1),1)=(x|1)-((x,1)|1)=(x|1)-(x,1)(1,1)=0$. Normitetaan vektori $\widehat{e_2}$ vielä sopivasti. Helppo lasku osoittaa, että $\|\widehat{e_2}\|_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Määritellään nyt

$$e_2=\frac{1}{\|\widehat{e_2}\|_2}\widehat{e_2}=2\sqrt{3}(x-1/2).$$

Nyt joukko $\{e_1, e_2\}$ on ortonormaali. Koitetaan löytää jonolle vielä kolmas vektori joukosta $\operatorname{span}\{e_1, e_2, x^2\}$. Eräs vektoreille e_1 ja e_2 ortogonaalinen vektori tästä joukosta on

$$\widehat{e_2}(x) = x^2 - (x^2|e_1)e_1 - (x^2|e_2)e_2 = x^2 - \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}e_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Normitetaan vielä tämä vektori. Hieman pidemmällä laskulla saadaan $\|\widehat{e_3}\|_2 = \frac{1}{6\sqrt{5}}$. Siis määritellään

$$e_3 = \frac{1}{\|\widehat{e_3}\|_2}\widehat{e_3} = 6\sqrt{5}(x^2 - x + 1/6).$$

Nyt jono $\{e_1, e_2, e_3\}$ on ortonormaali.

Kohta (ii). Ortogonaalisen projektion määritelmän nojalla funktiolle x^3 löytyy yksikäsitteinen vektori $P_M(x^3) \in M$, joka minimoi etäisyyden $\|x^3 - P_M(x^3)\|_2$. Monisteen Lauseen 4.34 nojalla tämä projektio voidaan laskea kannan ortonormaalin $\{e_1, e_2, e_3\}$ avulla kaavasta

$$P_M(x^3) = (x^3|e_1)e_1 + (x^3|e_2)e_2 + (x^3|e_3)e_3.$$

Täytyy siis vain laskea integroimalla kertoimet $(x^3|e_j)$ ja sijoittaa lausekkeet ylläolevaan kaavaan. Parilla laskulla saadaan, että

$$(x^3|e_1) = \frac{1}{4}, \quad (x^3|e_2) = \frac{3\sqrt{3}}{20}, \quad (x^3|e_3) = \frac{1}{4\sqrt{5}}.$$

Sijoittamalla saadaan siis

$$\begin{aligned} P_M(x^3) &= \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{5}}6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{10}x + \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Täytyy enää laskea normi $\|x^3 - P_m(x^3)\|_2$. Jälleen integroimalla saadaan, että

$$\|x^3 - P_m(x^3)\|_2 = \frac{1}{20\sqrt{7}}.$$

Tämä on siis funktion x^3 etäisyys aliavaruudesta M.

Kohta (iii). Jos $f \in L^2(0,1)$ on mielivaltainen funktio, niin käytetään taas Lauseen 4.34 antamaa kaavaa

$$P_M f = (f|e_1)e_1 + (f|e_2)e_2 + (f|e_3)e_3.$$

Tästä voidaan nähdä, että

$$P_M f(x) = \int_0^1 (f(y)e_1(y)e_1(x) + f(y)e_2(y)e_2(x) + f(y)e_3(y)e_3(x))\, dy) \int_0^1 f(y)K(x,y)dy,$$

missä

$$K(x,y) = e_1(y)e_1(x) + e_2(y)e_2(x) + e_3(y)e_3(x).$$

Sijoittamalla funktioiden e_j lausekkeet saadaan, että

$$K(x,y) = 180x^2y^2 - 180x^2y + 30x^3 - 180xy^2 + 192xy - 36x + 30y^2 - 36y + 9.$$

5. Osoita, että luentomonisteen sivulla 86 esimerkissä 4.43 määritelty Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=0}^{\infty} \subset L^2(0,1)$ on Hilbert-avaruuden $L^2(0,1)$ kanta etenemällä seuraavien askeleitten kautta (käyttäen mittateorian tietoja, kaikkia yksityiskohtia ei tarvita, selvä idea riittää):

(i) Totea ensin, että konstruktion nojalla Haarin systeemi tuottaa ortonormaalin jonon

(ii) dyadisten välien Δ_k karakteristiset funktiot $\chi_{\Delta_k} \in \text{span}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ kaikilla k,

(iii) $\chi_G \in \overline{\text{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ kaikilla avoimilla joukoilla $G \subset [0,1]$,

(iv) $\chi_A \in \overline{\text{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ kaikilla mitallisilla joukoilla $A \subset [0,1]$,

(v) kaikki yksinkertaiset funktiot $f \in \overline{\text{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$,

(vi) vihdoin $L^2(0,1) = \overline{\text{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ratkaisu 5.

Kohta (i). Olkoon h_n Haarin kantafunktio, missä $n = 2^k + j$. Tällöin $|h_n(x)| = 0$ kaikilla x jotka eivät kuulu välille Δ_n, jonka pituus on $1/2^k$. Tällä välillä pätee $|h_n(x)| = 2^{k/2}$. Siispä

$$\|h_n\|_2 = \left(\int_0^{1/2^k} \left(2^{k/2}\right)^2 dx \right)^{1/2} = 1^{1/2} = 1$$

kaikilla n. Olkoon nyt $n \neq m$. Osoitetaan, että Haarin funktiot h_n ja h_m ovat ortogonaalisia keskenään. Tutkitaan välejä Δ_n ja Δ_m joilla Haarin kantafunktiot h_n ja h_m ovat epänollia. Näitä muotoa $[j/2^k, (j+1)/2^k]$ olevia välejä sanotaan Dyadisiksi väleiksi. Kaksi Dyadista väliä ovat joko erillisiä tai toinen sisältyy toiseen. Jos välit Δ_n ja Δ_m ovat erillisiä niin selvästi

$$(h_n | h_m) = \int_0^1 h_n(x) h_m(x) dx = 0.$$

Jos taas $\Delta_n \subset \Delta_m$, niin Dyadisuudesta seuraa että Δ_n sisältyy jompaankumpaan välin Δ_m puolikkaaseen. Funktio $h_m(x)$ on vakio (joko 1 tai -1) tällä puolikkaalla, joten:

$$(h_n | h_m) = \int_0^1 h_n(x) h_m(x) dx = \pm \int_{\Delta_n} h_n(x) dx = 0.$$

Siis Haarin jono on ortonormaali.

Kohta (ii). Jokainen Dyadinen väli on muotoa $[j/2^k, (j+1)/2^k]$. Todistetaan väite induktiolla luvun k suhteen. Alkutapaus $k = 0$ on selvä, sillä h_0 on Dyadisen välin $[0,1]$ karakteristinen funktio. Jos taas j on joku luku väliltä $[1, 2^k)$ ja Dyadisen välin $\Delta_n = [j/2^k, (j+1)/2^k]$ karakteristinen funktio kuuluu joukkoon $\text{span}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$, niin myös astetta syvemmän Dyadisen välin $[j/2^k, (j+1/2)/2^k]$ (eli välin Δ_n ensimmäisen puolikkaan) karakteristinen funktio kuuluu tähän joukkoon. Tämä nähdään kaavasta

$$\chi_{[j/2^k, (j+1/2)/2^k]}(x) = \frac{1}{2} \left(\chi_{\Delta_n}(x) + \frac{1}{2^{k/2}} h_n(x) \right).$$

Vastaavasti nähdään että välin $[(j+1/2)/2^k, (j+1)/2^k]$ karakteristinen funktio kuuluu joukkoon $\mathrm{span}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ käyttämällä kaavaa

$$\chi_{[(j+1/2)/2^k,(j+1)/2^k]}(x) = \frac{1}{2}\left(\chi_{\Delta_n}(x) - \frac{1}{2^{k/2}} h_n(x)\right).$$

Siis myös karakteristiset funktiot Dyadisille väleille, joiden leveys on 2^{k+1}, kuuluvat Haarin kantafunktioiden virittämään joukkoon.

Kohta (iii). Olkoon G avoin joukko välillä $[0,1]$. Lindelöfin lauseesta seuraa, että G on numeroituva yhdiste avoimista väleistä $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Leikkaamalla jokaisesta välistä I_n pois edellisiä välejä $I_1, \ldots, I_{n-1}$ voimme olettaa, että välit I_n ovat erillisiä. Tässä toimenpiteessä tosin menetämme välien avoimuuden. Kaikkien välien päätepisteiden joukko on kuitenkin nollamittainen, joten voimme unohtaa päätepisteet ja olettaa taas että jokainen väli on avoin. On suhteellisen yksinkertaista nähdä myös, että jokainen avoin väli on numeroituva yhdiste avoimista Dyadisista väleistä (jälleen lukuunottamatta jotain nollamittaista joukkoa). Tämä johtuu oleellisesti siitä että luvut muotoa $j/2^k$ ovat tiheässä välillä $[0,1]$. Siis voidaan olettaa että G on numeroituva yhdiste Dyadisista väleistä $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Nyt jokaisella $x \in [0,1]$ pätee

$$\chi_G(x) = \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{D_n}(x).$$

Oikeanpuolimmaisin sarja suppenee myös L^2-mielessä. Koska funktiot χ_{D_n} ovat joukossa $\mathrm{span}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$, voimme päätellä että χ_G on joukossa $\overline{\mathrm{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Kohta (iv). Olkoon A mitallinen joukko. Tällöin jokaisella n on olemassa avoin joukko G_n siten, että $A \subset G_n$ ja

$$|G_n \setminus A| < 1/n,$$

missä $|\cdot|$ merkitsee joukon Lebesguen mittaa. Nyt nähdään, että

$$\|\chi_A - \chi_{G_n}\|_2^2 = \int_{G_n\setminus A} 1^2 dx \leq 1/n.$$

Siis jono χ_{G_n} suppenee funktioon χ_A avaruudessa $L^2[0,1]$. Koska edellisen kohdan nojalla $\chi_{G_n} \in \overline{\mathrm{span}}\{h_m : m \in \mathbb{N}\}$ kaikilla n, niin koska tämä joukko on suljettu myös χ_A kuuluu kyseiseen joukkoon.

Kohta (v). Jokainen yksinkertainen funktio f on äärellinen lineaarikombinaatio mitallisten funktioiden karakteristisista funktioista. Jokainen tällainen karakteristinen funktio on joukossa $\overline{\mathrm{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$, joka on avaruuden $L^2[0,1]$ aliavaruus. Siis myös $f \in \overline{\mathrm{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Kohta (vi). Yksinkertaiset funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^2[0,1]$, joten edellisen kohdan nojalla myös joukko $\overline{\mathrm{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tiheässä avaruudessa $L^2[0,1]$. Koska tämä joukko on suljettu, niin täytyy olla $L^2[0,1] = \overline{\mathrm{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$.

6*[1] Tarkastellaan sisätulon $(f|g) = \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x^2}dx$ määräämää painotettua L^2-avaruutta, eli Hilbertin avaruutta $E = L^2(w),\ \ w(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$.

(i) Osoita, että jokainen polynomi $P(x) \in E$, ja että kaikille polynomeille P ja Q pätee

$$(P\,|\,A_+Q) = (A_-P\,|\,Q)$$

missä $A_+\phi = -\phi'(x) + 2x\phi(x)$ ja $A_-\phi = \phi'(x)$.

(ii) Hermiten polynomit H_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ määritellään kaavalla $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$. Osoita, että funktiot $e_n := (2^n n!)^{-1/2}H_n$ muodostavat ortonormaalin jonon Hilbertin avaruudessa $E = L^2(w)$.

Ratkaisu 6.

Kohta (i). Pidetään tunnettuna, että eksponenttifunktio kasvaa huomattavasti nopeammin kuin polynomit. Itseasiassa jokaiselle polynomille P ja vakiolle $\lambda > 0$ on olemassa vakio C siten, että

$$|P(x)| \le Ce^{\lambda|x|} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Täten myös

$$\|P\|^2_{L^2(\omega)} = (P|P) = \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}|P(x)|^2e^{-x^2}dx \le \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}Ce^{-x^2+2\lambda|x|}dx < \infty.$$

Siis $P(x) \in L^2(\omega)$ kaikilla polynomeilla P. Osoitetaan nyt haluttu kaava osittaisintegroimalla:

$$\begin{aligned}
(A_-P\,|\,Q) &= \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(P(x)\right)\overline{Q(x)}e^{-x^2}dx \\
&= -\pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}P(x)\frac{d}{dx}\left(\overline{Q(x)}e^{-x^2}\right)dx \\
&= -\pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}P(x)\left(\overline{Q'(x)}e^{-x^2} - 2x\overline{Q(x)}e^{-x^2}\right)dx \\
&= \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}P(x)\left(\overline{A_+Q(x)}e^{-x^2}\right)dx \\
&= (P\,|\,A_+Q).
\end{aligned}$$

Kohta (ii). Lasketaan ensin, että

$$\begin{aligned}
A_+H_n(x) &= 2xH_n(x) - H_n'(x) \\
&= 2x(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} - (-1)^n\left(2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\right) \\
&= (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2} \\
&= H_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Osoitetaan sitten induktiolla, että $A_-H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ (missä A_- tarkoittaa oikeastaan vain derivointia x-muuttujan suhteen). Ensimmäiset Hermiten polynomit ovat $H_0(x) = 1$ ja $H_1(x) = 2x$, joten kaava pätee kun $n = 1$. Toisaalta jos kaava pätee jollain n, niin

$$\begin{aligned}
A_-H_{n+1}(x) &= A_-A_+H_n(x) = A_-\left(2xH_n(x) - H_n'(x)\right) \\
&= 2H_n(x) + 2xH_n'(x) - H_n''(x) = 2H_n(x) + 2x(2n)H_{n-1}(x) - (2n)H_{n-1}'(x) \\
&= 2H_n(x) + 2n(2xH_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x)) = 2H_n(x) + 2nA_+H_{n-1}(x) \\
&= 2H_n(x) + 2nH_n(x) = 2(n+1)H_n(x).
\end{aligned}$$

Joten induktioaskel toimii. Siis kaava pätee kaikilla n. Osoitetaan nyt, että jonon (H_n) jäsenet ovat ortogonaalisia. Jos $n > m$, niin voidaan laskea, että

$$(H_n|H_m) = (A_+H_{n-1}|H_m) = (H_{n-1}|A_-H_m) = 2m(H_{n-1}|H_{m-1}).$$

Sisätulo $(H_n|H_m)$ on siis nolla jos sisätulo $(H_{n-1}|H_{m-1})$ on nolla. Vastaavalla päättelyllä tämä taas on nolla jos sisätulo $(H_{n-2}|H_{m-2})$ on nolla. Jatkamalla prosessia päädytään sisätuloon $(H_{n-m}|H_0)$, joka on nolla sillä

$$(H_{n-m}|H_0) = (A_+H_{n-m-1}|H_0) = (H_{n-m-1}|A_-H_0) = (H_{n-m-1}|0) = 0.$$

Siis kaikki edelliset sisätulot muotoa $(H_{n-k}|H_{m-k}$ ovat myös nollia, erityisesti $(H_n|H_m) = 0$ eli Hermiten polynomit ovat ortogonaalisia keskenään.

Osoitetaan nyt, että valitsemalla $e_n = (2^n n!)^{-1/2}H_n$ saadaan ortonormaali jono. Jono on ortogonaalinen koska polynomit H_n ovat ortogonaalisia. Osoitetaan, että jokaisen polynomin e_n normi avaruudessa $L^2(\omega)$ on yksi. Tehdään tämä induktiolla. Tapauksessa $n = 0$ saadaan $e_0(x) = 1$, jolloin

$$(e_0|e_0) = \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \pi^{-1/2}\sqrt{\pi} = 1.$$

Toisaalta jos väite pätee tapauksessa n, niin

$$\begin{aligned}
(e_{n+1}|e_{n+1}) &= (2^{n+1}(n+1)!)^{-1}(H_{n+1}|H_{n+1}) = (2^{n+1}(n+1)!)^{-1}(A_+H_n|H_{n+1}) \\
&= (2^{n+1}(n+1)!)^{-1}(H_n|A_-H_{n+1}) = (2^{n+1}(n+1)!)^{-1}(H_n|2(n+1)H_n) \\
&= (2^n n!)^{-1}(H_n|H_n) = (e_n|e_n) = 1.
\end{aligned}$$

Induktion nojalla jono (e_n) on siis ortonormaali.

Vihjeitä:

T.2: [(i)Muista Besselin epäyhtälö!]

T.5: [(i): Osoita, että kyseinen joukko on suljettu ja konveksi.]

T.6: [Osoita, että $A_+H_n(x) = H_{n+1}(x)$ ja $A_-H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$. Voit olettaa tunnetuksi, että $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. .]