FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

3. MALLIVASTAUKSET

HUOM: Tällä kertaa tehtäviä enemmän, koska viikolla 6 ei ole luentoja. Viikolla 7 luennot normaalisti, lisäksi laskarien tilalla pe 14.2, 12-14 salissa B322 ylimääräinen luento.

1. (i) Osoita, että avaruuksille $L^p(0,1)$ (väli $(0,1)$ on varustettu tavallisella Lebesguen mitalla) pätee

$$L^r(0,1) \subset L^p(0,1) \quad \text{jos} \quad 1 \le p \le r < \infty. \tag{0.1}$$

Todista se näyttämällä, että aina

$$\|f\|_{L^p(0,1)} \le \|f\|_{L^r(0,1)} \quad \text{jos} \quad 1 \le p \le r < \infty.$$

(ii) Tarkista, että inkluusio (0.1) on aito jos $r > p$.

(iii) Onko inkluusio (0.1) voimassa jos väli (0,1) korvataan reaaliakselilla, eli tarkastellaan avaruuksia $L^p(\mathbb{R})$?

Ratkaisu 1.

Kohta (i). Osoitamme tehtävän epäyhtälön. Olkoon $f \in L^r(0,1)$ annettu. Määritellään apufunktiot $g_1(t) = |f(t)|^p$, $g_2(t) = 1$ ja eksponentti $p' = r/p \ge 1$. Merkitsemme luvun p' Hölder-konjugaattia symbolilla q'. Hölderin epäyhtälön nojalla siis

$$\|g_1 g_2\|_1 \le \|g_1\|_{p'} \|g_2\|_{q'}.$$

Kirjoittamalla tämä auki saamme, että

$$\int_0^1 |f(t)|^p \cdot 1\, dt \le \left(\int_0^1 |f(t)|^r \right)^{p/r} \left(\int_0^1 1^{q'} \right)^{1/q'} = \left(\int_0^1 |f(t)|^r \right)^{p/r} \cdot 1.$$

Toisin sanottuna:

$$\|f\|_p^p \le \|f\|_r^p,$$

mistä saamme halutun epäyhtälön. Tästä voimme myös päätellä, että $L^r(0,1) \subset L^p(0,1)$.

Kohta (ii). Osoitetaan, että inkluusio on aito. Palautetaan mieleen, että integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

hajaantuu kun $\alpha \ge 1$ ja suppenee kun $\alpha < 1$. Olkoon nyt luvut r, p annettu, missä $r > p \ge 1$. Olkoon $\alpha = 1/r$. Tällöin funktio $f(x) = 1/x^\alpha$ on avaruudessa $L^p(0,1)$, koska integraali

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/r}} dx$$

suppenee (eksponentti p/r on pienempää kuin yksi). Toisaalta $f \notin L^r(0,1)$, sillä

$$\|f\|_r^r = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty.$$

Siis inkluusio $L^r(0,1) \subset L^p(0,1)$ ei ole aito.

Inkluusio ei ole voimassa avaruuksissa $L^p(\mathbb{R})$. Itseasiassa jos $r > p$, niin kumpikaan avaruuksista $L^p(\mathbb{R})$ ja $L^r(\mathbb{R})$ ei sisällä toista. Epäinkluusion $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^r(\mathbb{R})$ todistamiseksi riittää tutkia funktiota, joka on kohdan (ii) funktio f välillä $(0,1)$ ja nollaa muualla. Toiseen suuntaan voimme osoittaa epäinkluusion $L^r(\mathbb{R}) \not\subset L^p(\mathbb{R})$ tutkimalla funktiota

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ x^{-1/p}, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}.$$

Tälle funktiolle pätee nimittäin

$$\|g\|_p^p = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$$

ja

$$\|g\|_r^r = \int_1^\infty \frac{1}{x^{r/p}} dx < \infty,$$

joten $g \in L^r(\mathbb{R})$, mutta $g \notin L^p(\mathbb{R})$.

2. Todista Minkowskin epäyhtälö funktioille: jos samassa mitta-avaruudessa määritellyille mitallisille funktioille f ja g pätee $f, g \in L^p$, missä ja $1 \leq p < \infty$,niin silloin

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Ratkaisu 2.

Kyseinen epäyhtälö on triviaali jos $f + g = 0$ melkein kaikkialla. Voimme siis olettaa, että $f + g$ ei ole identtisesti nolla melkein kaikkialla. Osoitetaan ensin, että $\|f + g\|_p < \infty$. Tämä onnistuu arviolla

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) \leq \int_\Omega \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^p d\mu(x) \\ &\leq \int_\Omega (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p d\mu(x) = \int_\Omega 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} d\mu(x) \\ &\leq \int_\Omega 2^p \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right) d\mu(x) < \infty. \end{aligned}$$

Arvioidaan seuraavaksi, että

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p d\mu(x) \\
&= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)| d\mu(x) \\
&\le \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}\left(|f(x)|+|g(x)|\right) d\mu(x) \\
&= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)| d\mu(x) + \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)| d\mu(x).
\end{aligned}
$$

Määrittelemme nyt apufunktion $h(x) = |f(x)+g(x)|^{p-1}$. Tällöin ylläolevan arvion viimeisin lauseke voidaan kirjoittaa muodossa $\|hf\|_1 + \|hg\|_1$. Sovellamme nyt Hölderin epäyhtälöä eksponentilla p, ja saamme arviot

$$\|hf\|_1 \le \|f\|_p \|h\|_q \quad \text{ja} \quad \|hg\|_1 \le \|g\|_p \|h\|_q,$$

missä $q = p/(p-1)$ on eksponentin p Hölder-konjugaatti. Huomaamme ensinnäkin, että

$$\|h\|_q = \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1}.$$

Yhdistämällä epäyhtälöt saamme nyt, että

$$\|f+g\|_p^p \le \|f\|_p\|h\|_q + \|g\|_p\|h\|_q = \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)\|f+g\|_p^{p-1}.$$

Jakamalla tästä pois kerroin $\|f+g\|_p^{p-1}$ (joka oletuksen mukaan ei ole nolla) saamme halutun Minkowskin epäyhtälön.

3. Tarkastellaan avaruuden $C(0,1)$ osajoukkoja M, varustettuna normilla $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Onko M Banach-avaruus, kun

a) $M = \{f \in C(0,1) : \ f(x) = 0 \text{ kun } 0 \le x < 1/2\}$.

b) $M = \{f \in C(0,1) : f(0) = 0 \text{ ja } f(1) = 1\}$,

c) $M = \{f \in C(0,1) : \int_0^1 f(x) = 0\}$.

Ratkaisu 3.

Kohta a). Osoitamme, että M on Banachin avaruus. Kurssin Lauseen 3.11 nojalla riittää osoittaa, että M on avaruuden $C(0,1)$ suljettu vektorialiavaruus. Tarkistetaan ensin vektorialiavaruuden aksioomat.

1. Ensinnäkin $0 \in M$, sillä triviaalisti $0 = 0$ kun $0 \le x < 1/2$.
2. Jos $f, g \in M$, niin $f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$ kun $0 \le x < 1/2$. Siis $f + g \in M$
3. Jos $f \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin $\lambda f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$, kun $0 \le x < 1/2$. Siis $\lambda f \in M$.

Osoitetaan nyt, että M on suljettu. Käytämme suljetun joukon määritelmää jonojen avulla. Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ jono, jolla on raja-arvo f avaruudessa $C(0,1)$. Osoitamme, että $f \in M$. Tätä varten olkoon $x \in [0,1/2)$. Voimme arvioida, että

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = \|f - f_n\|_\infty.$$

Lauseke $\|f - f_n\|_\infty$ lähestyy nollaa kun $n \to \infty$. Edellisen arvion perusteella täytyy siis olla $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1/2)$. Siis $f \in M$, kuten haluttiin.

Kohta b). Osoitamme, että M ei ole Banachin avaruus. Joukko M ei itseasiassa ole edes vektoriavaruus, sillä jos $f, g \in M$, niin $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2$, joten $f + g \notin M$. Joukko M ei siis voi olla Banachin avaruus.

Kohta c). Osoitamme, että M on Banachin avaruus. Tarkistetaan ensin, että M on avaruuden $C(0,1)$ vektorialiavaruus

1. Ensinnäkin $0 \in M$, sillä $\int_0^1 0dx = 0$.
2. Jos $f, g \in M$, niin $\int_0^1 (f(x) + g(x))dx = 0 + 0 = 0$. Siis $f + g \in M$
3. Jos $f \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin $\int_0^1 \lambda f(x)dx = \lambda \cdot 0 = 0$. Siis $\lambda f \in M$.

Osoitetaan nyt, että M on suljettu. Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ jono, jolla on raja-arvo f avaruudessa $C(0,1)$. Osoitamme, että $f \in M$. Voimme arvioida, että

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)dx\right| &= \left|\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f_n(x)dx\right| \\
&\leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|dx \\
&\leq \int_0^1 \|f - f_n\|_\infty dx \\
&= \|f - f_n\|_\infty.
\end{aligned}$$

Lauseke $\|f - f_n\|_\infty$ lähestyy nollaa kun $n \to \infty$. Edellisen arvion perusteella täytyy siis olla $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Siis $f \in M$, kuten haluttiin.

4. Olkoon $f_n(x) = (-1)^n x^n / n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum f_n$ avaruudessa $C(0,1)$? Suppeneeko se absoluutisesti?

Ratkaisu 4.

Palautetaan mieleen Leibnizin alternoivan summan testi (kts. esim `http://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_series_test`). Testin mukaan jos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on vähenevä jono positiivisia reaalilukuja jolle $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{0.2}$$

suppenee. Lisäksi testi antaa seuraavan arvion osasummille $S_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$. Jos merkitsemme $S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, niin kaikilla k pätee

$$|S - S_k| \leq a_{k+1}.$$

Osoitetaan nyt, että sarja $\sum f_n$ suppenee avaruudessa $C(0,1)$. Jono x^n/n on positiivinen ja vähenee kohti nollaa jokaiselle $x \in [0,1]$, joten Leibnizin testin nojalla sarja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee kaikilla $x \in [0,1]$. Sarjamme suppenee siis ainakin pisteittäin. Merkitään pisteittäistä raja-arvoa funktiolla

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Osoitetaan nyt, että sarja suppenee myös sup-normin mielessä. Määrittelemme tätä varten osasummafunktion

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x),$$

jolloin (0.2) antaa meille arvion

$$|S(x) - S_k(x)| \leq \frac{x^{k+1}}{k+1} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Tästä voimme päätellä, että $\|S - S_k\|_\infty \leq 1/(k+1)$. Siis funktiojono S_k suppenee kohti funktiota S myös normissa $\|\cdot\|_\infty$, kuten haluttiin.

Osoitetaan kuitenkin, että sarja $\sum f_n$ ei suppene absoluuttisesti. Jokaisella n pätee

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Tällöin saamme, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Siis sarja ei suppene absoluuttisesti.

5. Tarkastellaan L^p-avaruuksien määritelmää kun $1 \leq p < \infty$. Luentomonisteessa on mm. todistettu (lue kyseinen kohta!), että ekvivalenssiluokkien yhteenlasku on hyvin määritelty, eli jos $f, g, \widetilde{f}, \widetilde{g} \in L^p$ sekä $f(x) = \widetilde{f}(x)$ m.k. x ja $g(x) = \widetilde{g}(x)$ m.k. x, niin silloin $f+g = \widetilde{f}+\widetilde{g}$ mk. x.

Mieti huolellisesti vaatiiko seuraava vektoriavaruudelta vaadittava ominaisuus perustelemista: jos $f, g, h \in L^{(p)}$. niin

$$([f] + [g]) + [h] = [f] + ([g] + [h]).$$

Ratkaisu 5.

Luentomonisteen sivulla 46 todettiin, että jos funktioille $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^p$ pätee $f_1 \sim f_2$ ja $g_1 \sim g_2$, niin silloin myös $(f_1 + g_1) \sim (f_2 + g_2)$. Voimme täten määritellä ekvivalenssiluokkien yhteenlaskun kaavalla

$$[f] + [g] = [f + g],$$

sillä kuten yllä mainittiin, summan ekvivalenssiluokka ei riipu sen termien edustajista. Voimme nyt todistaa tehtävässä halutun väitteen laskulla

$$([f]+[g])+[h] = [f+g]+[h] = [(f+g)+h] = [f+(g+h)] = [f]+[g+h] = [f]+([g]+[h]).$$

6. Olkoon $\mathrm{Lip}(0,1)$ sellaisten funktioiden $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ joukko, joille

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|} < \infty.$$

Tällaisia funktioita kutsutaan *Lipschitz-funktioksi*

Näytä aluksi, että $\mathrm{Lip}(0,1)$ on vektoriavaruus ja että $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ on normi. Osoita sen jälkeen, että $(\mathrm{Lip}(0,1), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ on Banachin avaruus.

Ratkaisu 6. Tunnetusti (Esim. Topologia 1) jokainen Lipschitz-funktio on jatkuva. Siis $\mathrm{Lip}(0,1) \subset C(0,1)$. Osoitetaan että $\mathrm{Lip}(0,1)$ on vektoriavaruus osoittamalla, että se on avaruuden $C(0,1)$ vektorialiavaruus. Tarkistamme vaaditut ehdot ja osoitamme samalla, että lauseke $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ määrittelee normin avaruudessa $\mathrm{Lip}(0,1)$

1. Jos $f, g \in \mathrm{Lip}(0,1)$, niin osoitamme että myös $f + g \in \mathrm{Lip}(0,1)$. Tämä onnistuu laskulla

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathrm{Lip}} &= |f(0) + g(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) + g(s) - f(t) - g(t)|}{|s-t|} \\
&\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|} + \sup_{s \neq t} \frac{|g(s) - g(t)|}{|s-t|} \\
&= \|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}},
\end{aligned}$$

mikä osoittaa myös kolmioepäyhtälön normille.

2. Jos $f \in \mathrm{Lip}(0,1)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin myös $\lambda f \in \mathrm{Lip}(0,1)$, sillä

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{\mathrm{Lip}} &= |\lambda f(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|\lambda f(s) - \lambda f(t)|}{|s-t|} \\
&= |\lambda||f(0)| + |\lambda| \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|} \\
&= |\lambda| \|f\|_{\mathrm{Lip}}.
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa myös normin ehdon (N2).

3. Ensinnäkin $0 \in \mathrm{Lip}(0,1)$, sillä helposti nähdään että $\|0\|_{\mathrm{Lip}} = 0$. Toisaalta jos $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0$ jollain funktiolla f, niin voimme päätellä seuraavasti että $f = 0$. Ensinnäkin täytyy olla $|f(s) - f(t)| = 0$ kaikilla $s \neq t$. Siis f on vakiofunktio. Toiseksi täytyy olla $f(0) = 0$, joten $f(x) = 0$ kaikilla x, kuten haluttiin. Siis myös normin ehto (N3) toteutuu.

Osoitetaan vielä, että $(\mathrm{Lip}(0,1), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ on Banachin avaruus. Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-jono avaruudessa $\mathrm{Lip}(0,1)$. Huomaamme ensin että jos $g \in \mathrm{Lip}(0,1)$, niin

$$\sup_{t\in[0,1]} |g(t)| \leq |g(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |g(t) - g(0)| \leq |g(0)| + \sup_{t\in(0,1]} \frac{|g(t) - g(0)|}{t} \leq \|g\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Siis $\|g\|_\infty \leq \|g\|_{\mathrm{Lip}}$ kaikilla $g \in \mathrm{Lip}(0,1)$. Koska jono f_n on Cauchy normissa $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$, on se täten myös Cauchy normissa $\|\cdot\|_\infty$. Koska avaruus $C(0,1)$ on täydellinen tässä normissa, voimme päätellä että funktiojonolla f_n on olemassa raja-arvo $f \in C(0,1)$ sup-normin mielessä. Osoitetaan, että jono f_n suppenee funktioon f myös Lipschitz-normissa, ja että $f \in \mathrm{Lip}(0,1)$.

Käytetään hyödyksi tietoa, että kaikilla $x \in [0,1]$ pätee $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$. Saamme ensinnäkin kaikilla $s,t \in [0,1]$, $s \neq t$ identiteetin

$$\begin{aligned} &|f(0) - f_n(0)| + \frac{|(f(s) - f_n(s)) - (f(t) - f_n(t))|}{|s-t|} \\ &\qquad = \lim_{m\to\infty}\left(|f_m(0) - f_n(0)| + \frac{|(f_m(s) - f_n(s)) - (f_m(t) - f_n(t))|}{|s-t|}\right). \end{aligned} \tag{0.3}$$

Olkoon nyt $\epsilon > 0$. Valitaan n_0 niin suureksi, että $\|f_m - f_n\|_{\mathrm{Lip}} < \epsilon$ kaikilla $m,n > n_0$. Tällöin kaikilla $s,t \in [0,1]$, $s \neq t$ pätee Lipschitz-normin määritelmän perusteella, että

$$|f_m(0) - f_n(0)| + \frac{|(f_m(s) - f_n(s)) - (f_m(t) - f_n(t))|}{|s-t|} < \epsilon.$$

Koska tämä arvio pätee kaikilla $m > n_0$, voimme päätellä yhtälöstä (0.3) että

$$|f(0) - f_n(0)| + \frac{|(f(s) - f_n(s)) - (f(t) - f_n(t))|}{|s-t|} \leq \epsilon,$$

kaikilla $n > n_0$ ja $s,t \in [0,1]$, $s \neq t$. Täten myös $\|f - f_n\|_{\mathrm{Lip}} < \epsilon$. Olemme osoittaneet, että $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathrm{Lip}} = 0$, kuten haluttiin. Lisäksi näemme $f \in \mathrm{Lip}(0,1)$, sillä

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|f - f_n\|_{\mathrm{Lip}} + \|f_n\|_{\mathrm{Lip}} < \infty$$

millä tahansa $n \in \mathbb{N}$. Siis $\mathrm{Lip}(0,1)$ on Banachin avaruus.

7. Olkoon E Banachin avaruus, ja $M \subset E$ suljettu vektorialiavaruus. Tekijä avaruus E/M koostuu ekvivalenssiluokista jotka saadaan samaistamalla vektorit $x, y \in E$ mikäli $x - y \in M$. Alkion $x \in E$ määräämää ekvivalenssiluokkaa merkitään symbolilla $x + M$. Erityisesti siis $x + M = y + M$ jos ja vain jos $x - y \in M$.

(i) Tarkista, että tekijäavaruuden E/M laskutoimitukset $(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$ ja $\lambda(x+M) = \lambda x + M$ kun $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbf{K}$ ovat hyvin määriteltyjä, eli että ne eivät riipu edustajien x, y valinnoista.

(ii) Näytä, että kaava $\|x + M\| := \inf\{\|x - m\| : m \in M\}$ määrittelee normin tekijäavaruuteen E/M. Totea, että tälle normille pätee $\|x + M\| \leq \|x\|$ kaikilla $x \in E$.

(iii) Missa kohtaa kohdassa (ii) tarvittiin sitä tietoa, että aliavaruus M on suljettu?

Ratkaisu 7.

Kohta **(i)**. Osoitetaan laskutoimitusten hyvinmääriteltävyys. Tätä varten olkoon $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ annettu, missä $x_1 - x_2 \in M$ ja $y_1 - y_2 \in M$. Koska M on vektorialiavaruus, pätee myös $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in M$. Täten $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in M$. Voimme päätellä, että $(x_1 + y_1) + M = (x_2 + y_2) + M$. Ekvivalenssiluokkien summa $(x + y) + M$ ei siis riipu edustajista x ja y, kuten haluttiin.

Olkoon nyt $\lambda \in \mathbb{K}$. Koska M on vektorialiavaruus, on oltava $\lambda(x_1 - x_2) \in M$. Siis $\lambda x_1 - \lambda x_2 \in M$, joten $\lambda x_1 + M = \lambda x_2 + M$. Ekvivalenssiluokissa määritelty skalaarikertolaskukaan ei siis riipu edustajasta.

Kohta **(ii)**. Osoitetaan ensin, että normi $\|x + M\|$ ei riipu edustajasta x. Jos $x - y \in M$, niin jokainen avaruuden M alkio m voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $m' + (x - y)$, missä $m' \in M$. Täten

$$\inf\{\|x - m\| : m \in M\} = \inf\{\|x - (m' + (x - y))\| : m' \in M\} = \inf\{\|y - m'\| : m' \in M\}.$$

Siis $\|x + M\| = \|y + M\|$, kuten haluttiin. Käydään nyt läpi normin aksioomat.

- Ehto (N1), eli kolmioepäyhtälö. Olkoon $x, y \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\|(x + y) + M\| &= \inf\{\|x + y - m\| : m \in M\} \\
&= \inf\{\|x + y - (m_1 + m_2)\| : m_1, m_2 \in M\} \\
&\leq \inf\{\|x - m_1\| + \|y - m_2\| : m_1, m_2 \in M\} \\
&= \inf\{\|x - m_1\| : m_1 \in M\} + \inf\{\|y - m_2\| : m_2 \in M\} \\
&= \|x + M\| + \|y + M\|.
\end{aligned}$$

  Siis ehto (N1) toteutuu.

- Ehto (N2). Olkoon $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Oletetaan, että $\lambda \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + M\| &= \inf\{\|\lambda x - m\| : m \in M\} \\
&= |\lambda| \inf\{\|x - m/\lambda\| : m \in M\} \\
&= |\lambda| \inf\{\|x - m\| : m \in M\} \\
&= |\lambda| \|x + M\|,
\end{aligned}$$

  kuten haluttiin. Toisaalta jos $\lambda = 0$, niin $\lambda x = 0$. Osoitamme ensi kohdassa, että $\|0 + M\| = 0$, joten ehto (N2) toteutuu.

- Ehto (N3). Tekijäavaruuden E/M nollavektori on $0+M$. Huomataan ensin, että

  $$\|0+M\| = \inf\{\|0-m\| : m \in M\} = 0,$$

  joten $\|0+M\| = 0$. Osoitetaan nyt, että jos $\|x+M\| = 0$, niin $x+M = 0+M$. Jos $\|x+M\| = 0$, niin

  $$\inf\{\|x-m\| : m \in M\} = 0.$$

  Täten on olemassa jono $m_k \in M$ siten, että $\lim_{k\to\infty} \|x - m_k\| = 0$. Koska M on suljettu, täytyy olla $x \in M$. Siis $x - 0 \in M$, joten $x+M = 0+M$, kuten haluttiin.

Siis $\|\cdot\|$ määrittelee normin avaruudessa E/M. Koska M on vektorialiavaruus, pätee $0 \in M$. Tästä saamme arvion

$$\|x+M\| = \inf\{\|x-m\| : m \in M\} \leq \|x-0\| = \|x\|,$$

mikä oli myös todistettava.

Kohta **(iii)**. Käytimme tietoa, että M on suljettu, kun todistimme normin ehdon (N3).

8*[1] Osoita, että tehtävässä 7 määritelty normiavaruus $(E/M, \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus.

Ratkaisu 8.

Käytetään kurssimonisteen lausetta 3.22, jonka mukaan avaruus E/M on Banachin avaruus jos ja vain jos jokainen sen absoluuttisesti suppeneva sarja suppenee. Olkoon siis $(x_n + M)_{n\in\mathbb{N}}$ jono ekvivalenssiluokkia avaruudessa E/M, jolle

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||x_n + M|| < \infty.$$

Tässä olemme jo valinneet jokaiselle ekvivalenssiluokalle $x_n + M$ edustajan x_n avaruudesta E. Tekijäavaruuden normin määritelmästä (kts. Tehtävä 7) seuraa, että jokaisella n on olemassa $m_n \in M$ siten, että

$$||x_n - m_n|| \leq ||x_n + M|| + \frac{1}{2^n}.$$

Merkitään $y_n = x_n - m_n$ ja huomataan, että $y_n + M = x_n + M$ kaikilla n. Lisäksi

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||y_n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(||x_n + M|| + \frac{1}{2^n} \right) < \infty.$$

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Koska avaruus E on Banachin avaruus, jokainen sen absoluuttisesti suppeneva sarja suppenee. Siis sarja $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ suppenee kohti jotain alkiota Y. Toisaalta nyt kaikilla $N \in \mathbb{N}$ voimme arvioida, että

$$\begin{aligned}
\left\| (Y+M) - \sum_{n=0}^{N} (x_n + M) \right\| &= \left\| (Y+M) - \sum_{n=0}^{N} (y_n + M) \right\| \\
&= \left\| \left(Y - \sum_{n=0}^{N} y \right) + M \right\| \\
&\leq \left\| Y - \sum_{n=0}^{N} y \right\|.
\end{aligned}$$

Koska sarja $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ suppenee kohti alkiota Y, viimeinen lauseke ylläolevassa laskussa lähestyy nollaa, kun $N \to \infty$. Täten myös

$$\left\| (Y+M) - \sum_{n=0}^{N} (x_n + M) \right\| \to 0,$$

kun $N \to \infty$. Siis sarja $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + M)$ suppenee avaruudessa E/M alkioon $Y + M$. Siispä avaruus E/M on Banachin avaruus.