FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

2. HARJOITUKSET (pe 31.1, 12-14 salissa B322)

1. (i) Anna esimerkki jonosta joka suppenee avaruudessa ℓ^2, muttei suppene avaruudessa ℓ^1.

(ii) Anna esimerkki avaruuden ℓ_2 rajoitetusta jonosta, $x^{(n)}$ (siis $\|x^{(n)}\|_2 \leq C$ kaikilla $n \geq 1$), jolla ei ole laisinkaan suppenevia osajonoja.

Ratkaisu 1.

(i) Määrittelemme jonon $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2 \cap \ell^1$, jolla on raja-arvo avaruudessa ℓ^2 muttei avaruudessa ℓ^1. Tätä varten valitsemme

$$a^{(n)} = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, 0, 0, \ldots).$$

Osoitamme, että tämä jono suppenee avaruudessa ℓ^2 alkioon

$$a = (1/k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Ensinnäkin tunnetusti yliharmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

suppenee, ja täten $\|a\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2\right)^{1/2} < \infty$. Siis alkio a todellakin on avaruudessa ℓ^2. Toiseksi voimme laskea, että

$$\|a - a^{(n)}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_k^{(n)}|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Tämä suppenee kohti nollaa kun $n \to \infty$, johtuen edelleen yliharmonisen sarjan suppenemisesta. Siis jonolla $a^{(n)}$ on raja-arvo avaruudessa ℓ^2.

Osoitamme, että jonolla $a^{(n)}$ ei ole raja-arvoa avaruudessa ℓ^1. Tätä varten laskemme, että

$$\|a^{(n)}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k^{(n)}| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.$$

Nämä luvut ovat harmonisen sarjan osasummia, joten koska harmoninen sarja hajaantuu voimme päätellä, että $\|a^{(n)}\|_1 \to \infty$, kun $n \to \infty$. Toisaalta jokainen jono, jolla on olemassa raja-arvo, on rajoitettu. Koska jono $a^{(n)}$ ei ole rajoitettu avaruudessa ℓ^1, ei sillä myöskään ole raja-arvoa.

(ii) Määritellään alkiot $x^{(n)} \in \ell^2$ seuraavasti:

$$\begin{cases} x_m^{(n)} = 1, & \text{kun } n = m \\ x_m^{(n)} = 0, & \text{kun } n \neq m. \end{cases}.$$

Tällöin voimme laskea, että

$$\|x^{(n)}\|_2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left[x_m^{(n)}\right]^2 \right)^{1/2} = \left(1^2\right)^{1/2} = 1.$$

Siis jono $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu avaruudessa ℓ^2. Osoitamme, että sillä ei ole suppenevia osajonoja. Kun $n_1 \neq n_2$, niin

$$\|x^{(n_1)} - x^{(n_2)}\|_2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left[x_m^{(n_1)} - x_m^{(n_2)}\right]^2 \right)^{1/2} = \left(1^2 + 1^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Siis jokaisen kahden jonon $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ alkion etäisyys on aina vakio $\sqrt{2}$. Tästä näemme, että mikään jonon $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ osajono ei voi olla Cauchy, eli ei voi myöskään olla suppeneva avaruudessa ℓ^2.

2. Olkoon $1 \leq p \leq \infty$ ja olkoon $d = (d_n)_{n=1}$ kiinteä rajoitettu jono skalaareja. Tarkastellaan diagonaalioperaattoria

$$\Lambda_d : \ell^p \to \ell^p.$$

Luennoilla näytettiin, että Λ_d on rajoitettu lineaarioperaattori $\ell^p \to \ell^p$ kun $1 < p < \infty$. Päteekö tämä myös kun $p = 1$ tai $p = \infty$? Onko λ_d rajoitettu operaattori missään näissä avaruuksissa jos jono d ei olekaan rajoitettu? Laske kuvauksen Λ_d normi $\|\Lambda_d\|_{\ell^p\to\ell^p}$.

Ratkaisu 2.

Osoitetaan ensin, että jos jono d on rajoitettu, niin diagonaalioperaattori $\Lambda_d : \ell^p \to \ell^p$ on rajoitettu kun $p = 1$ ja $p = \infty$. Tapaus $p = 1$ hoituu laskulla

$$\|\Lambda_d x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |(\Lambda_d x)_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |d_n x_n| \leq \|d\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| = \|d\|_\infty \|x\|_1.$$

Tapauksessa $p = \infty$ taas voimme laskea, että

$$\|\Lambda_d x\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(\Lambda_d x)_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |d_n x_n| \leq \|d\|_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|d\|_\infty \|x\|_\infty.$$

Siis Λ_d on rajoitettu myös avaruuksissa ℓ^1 ja ℓ^∞. Saamme näistä arvioista myös operaattorin Λ_d normille yläarvion $||\Lambda_d||_{\ell^p\to\ell^p} \leq \|d\|_\infty$, minkä voi todeta vastaavilla arvioilla myös kun $1 < p < \infty$.

Osoitamme nyt operaattorinormille $||\Lambda_d||_{\ell^p\to\ell^p}$ ala-arvion $||\Lambda_d||_{\ell^p\to\ell^p} \geq \|d\|_\infty$. Tämä arvio osoittaa myös, että operaattori Λ_d ei ole rajoitettu avaruuksissa ℓ^p ellei jono d ole rajoitettu. Todistamme tämän ala-arvion löytämällä jonon $x^{(k)} \in \ell^p$ siten, että kun $k \to \infty$, niin

$$\frac{\|\Lambda_d x^{(k)}\|_p}{\|x^{(k)}\|_p} \to \|d\|_\infty.$$

Tämä osoittaa nimittäin että pienin mahdollinen vakio M, jolle epäyhtälö $\|\Lambda_d x\|_p \leq M\|x\|_p$ voi päteä kaikilla $x \in \ell^p$, on $M = \|d\|_\infty$.

Koska määritelmän mukaan
$$\|d\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |d_n|,$$
niin voimme valita jonon indeksejä $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ siten, että
$$\|d\|_\infty = \lim_{k\to\infty} |d_{n_k}|.$$

Huomio! Indeksien n_k ei välttämättä tarvitse olla erillisiä. Olkoon nyt $p \in [1,\infty]$. Määrittelemme jonon $x^{(k)} \in \ell^p$ seuraavasti:
$$\begin{cases} x_m^{(k)} = 1, & \text{kun } m = n_k \\ x_m^{(k)} = 0, & \text{kun } m \neq n_k. \end{cases}.$$

Tällöin $\|x^{(k)}\|_p = 1$ kaikilla k ja p, kuten tehtävässä 1. Kun $1 \leq p < \infty$ niin
$$\|\Lambda_d x^{(k)}\|_p = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left|d_m x_m^{(k)}\right|^p\right)^{1/p} = (|d_{n_k}|^p)^{1/p} = |d_{n_k}|.$$

Tapauksessa $p = \infty$ taas
$$\|\Lambda_d x^{(k)}\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left|d_m x_m^{(k)}\right| = \sup\{0, |d_{n_k}|\} = |d_{n_k}|.$$

Joka tapauksessa näemme, että kun $k \to \infty$, niin
$$\frac{\|\Lambda_d x^{(k)}\|_p}{\|x^{(k)}\|_p} = |d_{n_k}| \to \|d\|_\infty.$$

Siis $\|\Lambda_d\|_{\ell^p\to\ell^p} \geq \|d\|_\infty$, kuten haluttiin.

3. Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ kun $x = (x_n) \in \ell^p$. Päättele, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$ kun $1 \leq p < q < \infty$.

Ratkaisu 3.

Esitämme kaksi tapaa ratkaista tehtävä.

Tapa 1. Osoitetaan ensin epäyhtälö $\|x\|_q \leq \|x\|_1$ kaikilla $x \in \ell^1$. Määritelmän mukaan
$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{M} |x_n|,$$
kun taas
$$\|x\|_q = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^q\right)^{1/q} = \lim_{M\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{M} |x_n|^q\right)^{1/q}.$$

Epäyhtälön $\|x\|_q \leq \|x\|_1$ toteamiseksi riittäisi siis osoittaa, että

$$\sum_{n=0}^{M} |x_n|^q \leq \left(\sum_{n=0}^{M} |x_n| \right)^q \tag{0.1}$$

kaikilla $M \in \mathbb{N}$. Kun $M = 1$, tämä epäyhtälö on muotoa

$$|x_0|^q + |x_1|^q \leq (|x_0| + |x_1|)^q.$$

Tämän kahden muuttujan epäyhtälön voi todistaa esimerkiksi merkitsemällä $t = |x_1|/|x_0|$ ja etsimällä derivoimalla funktiolle $f(t) = (1+t)^q - 1 - t^q$ minimi positiivisten reaalilukujen joukossa.

Voimme nyt osoittaa epäyhtälön (0.1) induktiolla muuttujan M suhteen. Jos epäyhtälö pätee tapauksessa M, niin tapauksessa $M + 1$ saamme

$$\sum_{n=0}^{M+1} |x_n|^q \leq \left(\sum_{n=0}^{M} |x_n| \right)^q + |x_{M+1}|^q \leq \left(\sum_{n=0}^{M+1} |x_n| \right)^q,$$

missä olemme käyttäneet tapauksen $M = 1$ epäyhtälöä uudestaan viimeisessä arviossa. Induktion nojalla epäyhtälö (0.1) siis pätee.

Osoitetaan nyt epäyhtälö $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ kaikilla $x \in \ell^p$, missä $1 \leq p < q < \infty$. Merkitään $q' = q/p > 1$. Annetulla jonolla $x \in \ell^p$ määrittelemme myös uuden jonon

$$x' = (|x_0|^p, |x_1|^p, |x_2|^p, \ldots).$$

Tällöin $x' \in \ell^1$, sillä oletuksen $x \in \ell^p$ mukaan $\|x'\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Siis ensimmäisen tapauksen nojalla pätee epäyhtälö

$$\|x'\|_{q'} \leq \|x'\|_1.$$

Kirjoitetaan tämä epäyhtälö auki ja saadaan:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^q \right)^{p/q} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p.$$

Ottamalla p:nnes juuri puolittain saamme halutun epäyhtälön $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

Tapa 2. (By Vitali Soitu) Olkoon $x \in \ell^p$. Merkitsemme $a = \|x\|_p$. Tällöin saamme arvion

$$|x_k| = (|x_k|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = a,$$

eli $|x_k|/a < 1$ kaikilla k. Koska $p < q$ niin

$$\left(\frac{|x_k|}{a} \right)^p \geq \left(\frac{|x_k|}{a} \right)^q \quad \text{kaikilla } k$$

Nyt saamme arvion

$$1 = \frac{\|x\|_p}{a} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x_n|}{a} \right)^p \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x_n|}{a} \right)^q \right)^{1/p} = \frac{\|x\|_q^{q/p}}{a^{q/p}}.$$

Siis $\|x\|_q^{q/p} \leq a^{q/p}$, ja koska $a = \|x\|_p$ niin $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, kuten haluttiin.

Lopuksi voimme molemmilla tavoilla osoitetusta epäyhtälöstä päätellä, että jos $p < q$ ja $x \in \ell^p$, niin tällöin myös $x \in \ell^q$. Siispä $\ell^p \subset \ell^q$ kun $p < q$. Lisäksi huomaamme että jos $x \in \ell^p$ niin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ suppenee. Täten tunnetusti sarjan jäsenet suppenevat kohti nollaa, eli $\lim_{n\to\infty} |x_n|^p = 0$. Voimme siis päätellä että $x \in c_0$, joten $\ell^p \subset c_0$ kaikilla $p \in [1, \infty)$.

4. Jos $f \in C(0,1)$, asetetaan

$$Tf(x) = f(1) + \int_0^1 x^2 f(t^3)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

Osoita tarkasti, että T on hyvin määritelty ja jatkuva (eli rajoitettu) lineaarinen kuvaus $T : C(0,1) \to C(0,1)$. Bonustehtävä: Määrää T:n normi $\|T\|$.

Ratkaisu 4.

Osoitetaan ensin, että T on hyvin määritelty. Jos $f \in C(0,1)$, niin myös funktio $f(t^3)$ on jatkuva välillä $[0,1]$. Tällöin integraali

$$\int_0^1 f(t^3)\, dt$$

on olemassa Analyysi 2:n tiedoilla. Siis funktio

$$Tf(x) = f(1) + \int_0^1 x^2 f(t^3)\, dt = f(1) + x^2 \int_0^1 f(t^3)\, dt$$

on toisen asteen polynomina jatkuva välillä $[0,1]$. Siis $Tf \in C(0,1)$, joten T on hyvin määritelty.

Osoitetaan nyt, että T on lineaarinen. Olkoon tätä varten $f, g \in C(0,1)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Tällöin

$$\begin{aligned} T(f+g)(x) &= (f+g)(1) + x^2 \int_0^1 (f+g)(t^3)\, dt \\ &= f(1) + g(1) + x^2 \int_0^1 f(t^3)\, dt + x^2 \int_0^1 g(t^3)\, dt = Tf(x) + Tg(x) \end{aligned}$$

ja

$$T(\lambda f)(x) = \lambda f(1) + x^2 \int_0^1 \lambda f(t^3)\, dt = \lambda Tf(x),$$

joten T on lineaarikuvaus. Etsitään nyt operaattorin T normi ja osoitetaan täten samalla, että se on rajoitettu (ja siis jatkuva). Ensinnäkin saamme normille ylä-arvion seuraavasti

$$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty &= \|f(1) + x^2 \int_0^1 f(t^3)\,dt\|_\infty \leq |f(1)| + \|x^2 \int_0^1 f(t^3)\,dt\|_\infty \\ &= |f(1)| + |\int_0^1 f(t^3)\,dt| \leq \|f\|_\infty + \int_{0,1} \|f\|_\infty\,dt \\ &= 2\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

siis $\|T\|_{C(0,1)\to C(0,1)} \leq 2$. Toisaalta jos $f(t) = 1$ kaikilla t, niin

$$Tf(x) = 1 + x^2 \int_0^1 1\,dt = 1 + x^2.$$

Tällöin $\|f\|_\infty = 1$ ja $\|Tf\|_\infty = 2$, joten myös $\|T\|_{C(0,1)\to C(0,1)} \geq 2$. Siis

$$\|T\|_{C(0,1)\to C(0,1)} = 2.$$

5. Varustetaan avaruus $C(0,1)$ normilla

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

(osoitamme myöhemmin luennoilla, että kyseessä on todellakin normi). Osoita tarkasti , että normiavaruus $(C(0,1), \|\cdot\|_2)$ ei ole täydellinen.

Ratkaisu 5.

Selitämme ensin hieman, miksi avaruus $C(0,1)$ ei ole täydellinen normin $\|\cdot\|_2$ suhteen. Normiavaruus $(C(0,1), \|\cdot\|_2)$ sisältyy itseasiassa suurempaan avaruuteen $(L^2(0,1), \|\cdot\|_2)$, joka on täydellinen normiavaruus. Tämä avaruus määritellään tarkemmin luentomateriaalissa ja kurssilla Reaalianalyysi 1, mutta oleellista on että se sisältää jatkuvien funktioden ohessa epäjatkuvia funktioita, joille normi $\|\cdot\|_2$ on hyvinmääritelty. Jatkuvat funktiot ovat lisäksi tiheässä avaruudessa $L^2(0,1)$, mistä seuraa, että on epäjatkuvia funktioita joita voimme approksimoida jatkuvilla funktiolla normin $\|\cdot\|_2$ mielessä. Tätä ideaa käytämme myös tämän tehtävän ratkaisussa.

Osoitetaan, että on olemassa Cauchy-jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (C(0,1), \|\cdot\|_2)$, jolla ei ole raja-arvoa avaruudessa $C(0,1)$. Määrittelemme jonon seuraavasti

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - 2n(x - 1/2), & \text{kun } 1/2 < x \leq 1/2 + 1/(2n) \\ 0, & \text{kun } 1/2 + 1/(2n) < x \leq 1. \end{cases}.$$

Kaikilla n voimme tarkistaa, että määrittelemämme funktiot f_n ovat jatkuvia välillä $[0,1]$ tarkistamalla, että toispuoleiset raja-arvot pisteissä $1/2$ ja $1/2 + 1/(2n)$ täsmäävät. Funktiot f_n suppenevat pisteittäin kohti ei-jatkuvaa funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & \text{kun } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}.$$

Tämä funktio f on paloittain vakiofunktiona Riemann-integroituva, joten voimme puhua esimerkiksi normeista $\|f - f_n\|_2$. Osoitamme ensin, että

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

Tämä hoituu yksinkertaisesti laskemalla, että

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_2^2 &= \int_0^{1/2} |1-1|^2 dx + \int_{1/2}^{1/2+1/(2n)} |1 - 2n(x-1/2) - 0|^2 dx + \int_{1/2+1/(2n)}^{1} |0-0|^2 dx \\
&= \int_{1/2}^{1/2+1/(2n)} |1 - 2n(x-1/2)|^2 dx \\
&= \int_{1/2}^{1/2+1/(2n)} \left(4n^2(x-1/2)^2 - 4n(x-1/2) + 1\right) dx \\
&= \int_0^{1/(2n)} \left(4n^2x^2 - 4nx + 1\right) dx \\
&= 4n^2 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n}\right)^3 - 4n\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{6n}.
\end{aligned}$$

Tämä suppenee nollaan kun $n \to \infty$. Voimme nyt päätellä, että jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchy, koska sillä on raja-arvo normissa $\|\cdot\|_2$. Toisaalta raja-arvo on yksikäsitteinen, joten funktio f on jonon ainoa mahdollinen raja-arvo normissa $\|\cdot\|_2$. Koska f ei ole jatkuva, ei jonolla ole raja-arvoa avaruudessa $C(0,1)$, joten avaruus ei ole täydellinen normin $\|\cdot\|_2$ suhteen.

6* Olkoon $x = (x)_{n=1}^{\infty}$ skalaarijono, jolle $\|x\|_1 < \infty$. Osoita, että tällöin logaritmi ℓ^p-normista, $\log(\|x\|_p)$, on konveksi funktio parametrin $1/p$ funktiona.

Ratkaisu 6.

Palautetaan mieleen, että funktio $f(x) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ on konveksi, jos

$$tf(y_1) + (1-t)f(y_2) \geq f(ty_1 + (1-t)y_2) \quad \text{kaikilla } y_1, y_2 \in [a,b] \text{ ja } t \in [0,1].$$

Olkoon nyt $x \in \ell^1$ annettu. Tällöin Tehtävän 3 nojalla myös $x \in \ell^p$, missä $1 < p < \infty$. Tavoitteemme on osoittaa, että funktio $\log \|x\|_p$ on konveksi parametrin $1/p$ funktiona, eli että funktio

$$f(y) = \log \|x\|_{1/y}$$

on konveksi. Olkoon $y_1, y_2 \in [1, \infty)$ ja $t \in [0,1]$. Tällöin

$$\begin{aligned}
tf(y_1) + (1-t)f(y_2) &= t \log \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{1/y_1}\right)^{y_1} + (1-t)\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{1/y_2}\right)^{y_2} \\
&= \log \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{1/y_1}\right)^{ty_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{1/y_2}\right)^{(1-t)y_2},
\end{aligned}$$

kun taas

$$f(ty_1+(1-t)y_2)=\log\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{1/(ty_1+(1-t)y_2)}\right)^{ty_1+(1-t)y_2}.$$

Tavoitteemme on siis osoittaa epäyhtälö

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{1/y_1}\right)^{ty_1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{1/y_2}\right)^{(1-t)y_2}\geq\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{1/(ty_1+(1-t)y_2)}\right)^{ty_1+(1-t)y_2}. \tag{0.2}$$

Käytämme tätä varten Hölderin epäyhtälöä eksponenteilla

$$p=\frac{ty_1+(1-t)y_2}{ty_1}\quad\text{ja}\quad q=\frac{ty_1+(1-t)y_2}{(1-t)y_2}.$$

On helppo tarkistaa, että p ja q ovat toistensa Hölder-konjugaatteja. Sovelletaan Hölderin epäyhtälöä jonoihin

$$a_n=|x_n|^{t/(ty_1+(1-t)y_2)}\quad\text{ja}\quad b_n=|x_n|^{(1-t)/(ty_1+(1-t)y_2)}.$$

Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n^q\right)^{1/q}\geq\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n.$$

Kirjoittamalla tämä auki saamme

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{\frac{t}{ty_1+(1-t)y_2}\frac{ty_1+(1-t)y_2}{ty_1}}\right)^{ty_1/(ty_1+(1-t)y_2)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{\frac{(1-t)}{ty_1+(1-t)y_2}\frac{ty_1+(1-t)y_2}{(1-t)y_2}}\right)^{(1-t)y_2/(ty_1+(1-t)y_2)}$$
$$\geq\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{\frac{t}{ty_1+(1-t)y_2}+\frac{1-t}{ty_1+(1-t)y_2}}.$$

Mikä sievennettynä antaa

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{\frac{1}{y_1}}\right)^{ty_1/(ty_1+(1-t)y_2)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{\frac{1}{y_2}}\right)^{(1-t)y_2/(ty_1+(1-t)y_2)}\geq\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{\frac{1}{ty_1+(1-t)y_2}}.$$

Korottamalla tämä puolittain potenssiin $ty_1+(1-t)y_2$ antaa halutun epäyhtälön (0.2).