FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

1. MALLIVASTAUKSET

1. Olkoon $A \subset E$ normiavaruuden E osajoukko. Osoita, määritelmistä lähtien, että A on tiheä avaruudessa E jos ja vain jos $A \cap B \neq \emptyset$ jokaisella avaruuden E avoimella pallolla $B = B(x, r)$ (tässä siis $x \in E$ ja $r > 0$ ovat mielivaltaisia).

Ratkaisu 1.

Määritelmän mukaan A on tiheä avaruudessa E jos $\overline{A} = E$. Koska $\overline{A} \subset E$, tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $E \subset \overline{A}$. Toisin sanottuna jokaisen $x \in E$ täytyy siis kuulua sulkeumaan $\overline{A}$. Sulkeuman määritelmän nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kaikilla $r > 0$ joukko $A \cap B(x, r)$ on epätyhjä. Siis A on tiheä E:ssä jos ja vain jos $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ kaikilla $x \in E$ ja $r > 0$, kuten haluttiin.

2. Osoita, että c_0 on avaruuden c, ja puolestaan c avaruuden ℓ^∞ aliavaruus. Onko c_0 tiheässä avaruudessa c ? Onko c tiheässä avaruudessa ℓ^∞ ?

Ratkaisu 2.

Palautetaan ensin mieleen määritelmät

$$c_0 = \{x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

sekä

$$c = \{x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ on olemassa.}\}.$$

Määritelmistä huomataan selvästi sisältymiset $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$.

Osoitetaan, että c_0 on avaruuden c aliavaruus. Koska $c_0 \subset c$, riittää osoittaa että c_0 toteuttaa vektorialiavaruuden aksioomat. Nämä hoituvat seuraavasti:

1. $\overline{0} = (0, 0, 0, \ldots) \in c_0$, sillä $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
2. Jos $x \in c_0$ ja $y \in c_0$, niin $x + y \in c_0$, sillä

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = 0 + 0 = 0.$$

3. Jos $x \in c_0$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, niin $\alpha x \in c_0$, sillä

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Siis c_0 on avaruuden c aliavaruus.

Osoitetaan, että c on avaruuden ℓ^∞ aliavaruus. Koska $c \subset \ell^\infty$, riittää osoittaa että c toteuttaa vektorialiavaruuden aksioomat. Nämä hoituvat seuraavasti:

1. $\overline{0} = (0, 0, 0, \ldots) \in c$, sillä $\overline{0} \in c_0 \subset c$.

2. Jos $x \in c$ ja $y \in c$, niin $x + y \in c$, sillä jos raja-arvot $\lim_{n\to\infty} x_n$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n$ ovat olemassa niin tällöin kurssin Analyysi 1 tietojen perusteella
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$
3. Jos $x \in c$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, niin $\alpha x \in c$, sillä jos raja-arvo $\lim_{n\to\infty} x_n$ on olemassa niin tällöin kurssin Analyysi 1 tietojen perusteella
$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Siis c on avaruuden ℓ^∞ aliavaruus.

Osoitamme, että avaruus c_0 ei ole tiheässä avaruudessa c. Määritellään ensin alkio $e = (1, 1, 1, \ldots) \in c$. Tehtävän 1 perusteella riittää osoittaa, että pallo $B(e, 1/2)$ ei sisällä yhtään avaruuden c_0 alkiota. Huomataan, että jos $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in B(e, 1/2)$, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee
$$|x_n - 1| \leq ||x - e||_\infty \leq 1/2.$$
Täten $x_n \geq 1 - 1/2 = 1/2$. Ei siis ole ainakaan mahdollista, että $\lim x_n = 0$, joten $x \notin c_0$. Siis c_0 ei ole tiheässä avaruudessa c.

Osoitamme, että avaruus c ei ole tiheässä avaruudessa ℓ^∞. Määritellään ensin alkio $e' = (1, -1, 1, -1, \ldots) \in \ell^\infty$ (siis $e'_n = 1$ parillisilla n ja $e'_n = -1$ parittomilla n). Tehtävän 1 perusteella riittää osoittaa, että pallo $B(e', 1/2)$ ei sisällä yhtään avaruuden c alkiota. Huomataan, että jos $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in B(e', 1/2)$, niin seuraavat arviot pätevät
$$\begin{aligned} &\text{Parillisilla } n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - 1| \leq ||x - e'||_\infty \leq 1/2. \\ &\text{Parittomilla } n \in \mathbb{N}, \quad |x_n + 1| \leq ||x - e'||_\infty \leq 1/2. \end{aligned}$$
Tästä voidaan arvioida, että
$$\begin{aligned} &\text{Parillisilla } n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq 1 - 1/2 = 1/2. \\ &\text{Parittomilla } n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leq -1 + 1/2 = -1/2. \end{aligned}$$
Mistä saadaan esimerkiksi, että jos n on parillinen niin
$$|x_n - x_{n+1}| \geq x_n - x_{n+1} \geq 1/2 - (-1/2) = 1.$$
Toisaalta tämä osoittaa, että jono $x = (x_n)_{n=0}^\infty$ ei ole Cauchy, sillä muuten pätisi $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_{n+1}| = 0$. Siis jonolla x ei ole raja-arvoa, joten $x \notin c$. Tämä osoittaa, että c ei ole tiheä avaruudessa ℓ^∞.

3. Määritellään 'jatkuvien funktioiden avaruus $C(0, 1)$[1] välillä $[0, 1]$ asettamalla
$$C(0, 1) := \{f : [0, 1] \to \mathbb{K} \mid f \text{ on jatkuva}\},$$
ja varustamalla se normilla $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Osoita, että $C(0, 1)$ on normiavaruus näyttämällä että se on avaruuden $B([0, 1], \mathbb{K})$ aliavaruus.

[1] Joskus merkitään myös $C([0, 1])$.

Ratkaisu 3.

Kurssin Analyysi 1 perusteella tiedetään, että jatkuva funktio suljetulla välillä saa suurimman ja pienimmän arvonsa. Siis erityisesti jos $f \in C(0,1)$, niin

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| < \infty,$$

eli määritelmän mukaan f kuuluu myös avaruuteen $B([0,1],\mathbb{K})$. Siis $C(0,1) \subset B([0,1],\mathbb{K})$. Tarkistetaan vielä vektorialiavaruuden aksioomat.

1. $0 \in C(0,1)$, sillä jokainen vakiofunktio on jatkuva.
2. Jos $f \in C(0,1)$ ja $g \in C(0,1)$, niin kurssin Analyysi 1 tietojen perusteella funktio $f+g$ on jatkuva. Siis $f+g \in C(0,1)$.
3. Jos $f \in C(0,1)$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, niin kurssin Analyysi 1 tietojen perusteella funktio αf on jatkuva. Siis $\alpha f \in C(0,1)$.

Olemme osoittaneet, että $C(0,1)$ on avaruuden $B([0,1],\mathbb{K})$ aliavaruus. Kurssimonisteen Lauseen 2.9 nojalla $C(0,1)$ on täten normiavaruus.

4. Määritellään edellisen tehtävän avaruudessa uusi normi $\|\cdot\|^*$ asettamalla

$$\|\cdot\|^* := \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Näytä, että myös tällöin $(C(0,1), \|\cdot\|^*)$ on normiavaruus. Ovatko avaruuden $C(0,1)$ normit $\|\cdot\|_\infty$ ja $\|\cdot\|^*$ ekvivalentteja?

Ratkaisu 4.

Näytetään, että $(C(0,1), \|\cdot\|^*)$ on normiavaruus. Avaruus $C(0,1)$ on tunnetusti vektoriavaruus, joten riittää osoittaa että tehtävässä määritelty normi $\|\cdot\|^*$ myöskin toteuttaa normin aksioomat (määritelmä 2.3). Nämä hoituvat seuraavasti.

1. Olkoon $f, g \in C(0,1)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\|f+g\|^* &= \int_0^1 |f(t)+g(t)|dt \leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|)\, dt \\ &= \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |g(t)|dt = \|f\|^* + \|g\|^*,\end{aligned}$$

   joten kolmioepäyhtälö (aksiooma (N1)) toteutuu.

2. Jos $f \in C(0,1)$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, niin

$$\|\alpha f\|^* = \int_0^1 |\alpha f(t)|dt = \int_0^1 |\alpha||f(t)|dt = |\alpha| \int_0^1 |f(t)|dt = |\alpha|\|f\|^*,$$

   joten aksiooma (N2) toteutuu.

3. Selvästi $\|0\|^* = \int_0^1 |0| dt = 0$. Jos taas f ei ole identtisesti nolla niin voimme valita pisteen $x_0 \in [0,1]$ siten, että $f(x_0) \neq 0$. Tällöin jatkuvuuden perusteella on olemassa δ siten, että jos $|x_0 - x| < \delta$, niin

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |f(x_0)|/2 \quad \text{ja täten} \quad |f(x)| > |f(x_0)|/2.$$

Toisaalta nyt

$$\begin{aligned}\|f\|^* &= \int_0^1 |f(t)| dt \geq \int_{[0,1]\cap[x_0-\delta, x_0+\delta]} |f(t)| dt \\ &\geq \int_{[0,1]\cap[x_0-\delta, x_0+\delta]} (|f(x_0)|/2)\, dt \geq \delta |f(x_0)|/2 > 0.\end{aligned}$$

Siis $\|f\|^* \neq 0$.

Osoitetaan, että normit $\|\cdot\|_\infty$ ja $\|\cdot\|^*$ eivät ole ekvivalentteja avaruudessa $C(0,1)$. Tavoitteenamme on osoittaa, että ei ole olemassa vakiota C, jolle pätee arvio

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|^* \quad \text{kaikilla } f \in C(0,1). \tag{0.1}$$

Tarkastelemme tätä varten funktiojonoa $f_n(t) = t^n$. Huomaamme, että

$$|f_n|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} t^n = 1,$$

kun taas

$$|f_n|^* = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}1^n - \frac{1}{n+1}0^n = \frac{1}{n+1}.$$

Siis osamäärä $|f_n|_\infty / |f_n|^* = n+1$ voi olla mielivaltaisen suuri, mikä osoittaa että vakiota C kuten yhtälössä (**??**) ei voi olla olemassa.

5. Osoita, että normiavaruus c_0 on separoituva.

Ratkaisu 5.

Käytämme tässä tehtävässä hyödyksi sitä, että skalaarikunta $\mathbb{K}$ (joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$), jonka yli avaruus c_0 on määritelty, on myös separoituva. Kunnalla $\mathbb{R}$ on nimittäin numeroituva tiheä osajoukko $\mathbb{Q}$ ja kunnalla $\mathbb{C}$ puolestaan osajoukko $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{q_1 + iq_2 : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$. Koitamme säästää hieman notaatiossa ja merkitä molemmissa tapauksissa kunnan $\mathbb{K}$ numeroituvaa tiheää osajoukkoa symbolilla $\mathbb{K}_{num}$.

Tavoitteenamme on nyt siis löytää numeroituva tiheä osajoukko myös avaruudesta c_0. Huomataan, että jonot muotoa

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, 0, \ldots),$$

eli jonot joiden jäsenet x_n ovat nollasta poikkeavia vain äärellisen monella n, kuuluvat avaruuteen c_0. Määritellään avaruuden c_0 osajoukko S seuraavasti:

$$S := \{x = (x_n)_{n=0}^\infty \in c_0 : x_n \in \mathbb{K}_{num} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}, x_n \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } n \in \mathbb{N}\}.$$

Joukko S on selvästi numeroituva, sillä se on numeroituva yhdiste seuraavista numeroituvista joukoista:

$$\begin{aligned}
&S_1 = \{(q_0, 0, 0, 0, \ldots) \in c_0 : q_0 \in \mathbb{K}_{num}\} \\
&S_2 = \{(q_0, q_1, 0, 0, 0, \ldots) \in c_0 : q_0, q_1 \in \mathbb{K}_{num}\} \\
&S_3 = \{(q_0, q_1, q_2, 0, 0, 0, \ldots) \in c_0 : q_0, q_1, q_2 \in \mathbb{K}_{num}\} \\
&\quad \ldots
\end{aligned}$$

Osoitamme nyt, että S on tiheä avaruudessa c_0. Tehtävän 1 perusteella riittää valita mielivaltainen $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0$ sekä säde $r > 0$ ja osoittaa, että $S \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Konstruoimme nyt tähän joukkoon alkion q seuraavasti.

Avaruuden c_0 määritelmän perusteella $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. On siis olemassa sellainen $N \in \mathbb{N}$, että

$$|x_n| \leq r/2 \quad \text{kaikilla } n > N. \tag{0.2}$$

Käytetään nyt hyväksi joukon $\mathbb{K}_{num}$ tiheyttä skalaarikunnassa $\mathbb{K}$. Jokaisella $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ voimme valita alkion $q_n \in \mathbb{K}_{num}$ siten, että

$$|x_n - q_n| \leq r/2. \tag{0.3}$$

Määritellään nyt alkio $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N, 0, 0, 0, \ldots) \in S$. Voimme laskea, että

$$x - q = (x_1 - q_1, x_2 - q_2, \ldots, x_N - q_N, x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \ldots).$$

Toisaalta arvioiden (**??**) ja (**??**) perusteella jokainen jonon $x - q$ jäsen on itseisarvoltaan pienempää tai yhtä suurta kuin $r/2$. Siis $||x - q||_\infty \leq r/2$, joten $q \in B(x, r)$, kuten halusimme osoittaa. Avaruus c_0 on täten separoituva.

6* Osoita että jokainen äärellisulotteisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ normi on ekvivalentti standardin Euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ kanssa.

Ratkaisu 6. Olkoon $\|\cdot\|_*$ jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ normi. Osoitamme, että se on ekvivalentti normin $\|\cdot\|_2$ kanssa, toisin sanottuna että on olemassa positiiviset vakiot c ja C siten, että

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_* \leq C\|x\|_2 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Osoitamme ensin epäyhtälön $\|x\|_* \leq C\|x\|_2$. Tätä varten käytämme avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardia ortogonaalista kantaa e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Kirjoitetaan annettu vektori x kannan avulla muodossa $x = \sum_{j=1}^n a_j e_j$. Tällöin voimme arvioida

$$\|x\|_* = \left\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\right\|_* \leq \sum_{j=1}^n |a_j|\|e_j\|_* \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_j|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n \|e_j\|_*^2} = \|x\|_2\sqrt{\sum_{j=1}^n \|e_j\|_*^2},$$

missä olemme käyttäneet sekä kolmioepäyhtälöä normille $\|\cdot\|_*$ että Cauchyn epäyhtälöä. Nyt jos määrittelemme vakion C kaavalla

$$C = \sqrt{\sum_{j=1}^n \|e_j\|_*^2},$$

niin $\|x\|_* \leq C\|x\|_2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, kuten haluttiin.

Huomio. Epäyhtälöstä $\|x\|_* \leq C\|x\|_2$ voimme itseasiassa päätellä, että normi $\|\cdot\|_*$ ajateltuna kuvauksena $\|\cdot\|_* : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \mapsto [0, \infty)$ on jatkuva. Itseasiassa se on C-Lipschitz, sillä kolmioepäyhtälön avulla voimme arvioida, että kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$|\|x\|_* - \|y\|_*| \leq \|x - y\|_* \leq C\|x - y\|_2.$$

Osoitetaan nyt epäyhtälö $c\|x\|_2 \leq \|x\|_*$. Merkitään $\mathbb{R}^n$:ssä yksikköpallon kuorta $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$. Tällöin S^{n-1} on tunnetusti kompakti joukko normiavaruudessa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Edellisen huomion mukaan normikuvaus $\|\cdot\|_*$ on jatkuva, joten se saavuttaa yksikköpallon kuorella S^{n-1} myös pienimmän arvonsa. Merkitään tätä arvoa kirjaimella c. Ei ole mahdollista, että $c = 0$, sillä $\|x\|_* = 0$ jos ja vain jos $x = \overline{0}$. Täten $c > 0$. Jos nyt valitsemme mielivaltaisen vektorin $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$, niin vektori $x/\|x\|_2$ kuuluu yksikköpallon kuorelle, sillä

$$\left\| \frac{1}{\|x\|_2} x \right\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2} \|x\|_2 = 1.$$

Edellisen nojalla pätee tällöin myös, että

$$\left\| \frac{1}{\|x\|_2} x \right\|_* > c.$$

Toisaalta voimme nyt päätellä, että

$$c < \left\| \frac{1}{\|x\|_2} x \right\|_* = \frac{1}{\|x\|_2} \|x\|_*.$$

Täten $c\|x\|_2 \leq \|x\|_*$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$. Toisaalta epäyhtälö on triviaali kun $x = \overline{0}$, joten olemme osoittaneet, että normit $\|\cdot\|_2$ ja $\|\cdot\|_*$ ovat ekvivalentteja.