FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

11. HARJOITUKSET (pe 2.5, 12-14 salissa B322)

1. Olkoon H kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus ja $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Näytä, että

(i) $(ST)^* = T^*S^*$.

(ii) Jos S on kääntyvä ja itseadjungoitu , niin myös S^{-1} on itseadjungoitu.

(iii) Jos S on itseadjungoitu, niin myös T^*ST on itseadjungoitu.

Ratkaisu 1.

Kohta (i). Olkoon $x, y \in H$. Tällöin

$$(STx|y) = (Tx|S^*y) = (x|T^*S^*y).$$

Toisaalta $(STx|y) = (x|(ST)^*y)$. Koska x ja y ovat mielivaltaisia, täytyy olla $(ST)^* = T^*S^*$.

Kohta (ii). Olkoon operaattori S itseadjungoitu ja kääntyvä. Jos $x, y \in H$ ovat mielivaltaiset, niin

$$(S^{-1}x|y) = (S^{-1}x|SS^{-1}y) = (S^*S^{-1}x|S^{-1}y) = (SS^{-1}x|y) = (x|S^{-1}y).$$

Tämä osoittaa, että S on itseadjungoitu.

Kohta (iii). Olkoon S itseadjungoitu ja $x, y \in H$. Kohdan (i) nojalla

$$(T^*ST)^* = T^*(T^*S)^* = T^*S^*(T^*)^* = T^*ST.$$

Siis operaattori T^*ST on itseadjungoitu.

2. Olkoon $S \in \mathcal{L}(H)$, missä H on kompleksinen Hilbert-avaruus. Todista, että $\lambda \in \sigma(S)$ jos ja vain jos $\overline{\lambda} \in \sigma(S^*)$. Päättele tästä että itseadjungoidulle operattorille S pätee aina $\sigma(S) \subset \mathbb{R}$. Tee tämä seuraavissa vaiheissa:

(i) Osoita, että jos $(S - \lambda)x = 0$ jollain $x \in H \setminus \{0\}$, niin $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Valitse mielivaltainen $\lambda \in \sigma(S)$. Päättele, että operaattori $S - \lambda$ ei voi olla sekä injektio että surjektio. Käytä kohtaa (i) tapaukseen, missä $S - \lambda$ ei ole injektio.

(iii) Oleta, että $S - \lambda$ ei ole surjektio. Osoita, että kuvaus $S - \overline{\lambda}$ ei tällöin ole injektio. Käytä tähän seuraavaa aputulosta:

(iv) Jos $T : H \to H$ on lineaarinen operaattori, niin $(\text{Im } T)^\perp = \text{Ker } T^*$.

(v) Johda lopputulos kohdasta (iii).

Ratkaisu 2.

Palautetaan mieleen, että operaattorin S spektri $\sigma(S)$ koostuu niistä kompleksiluvuista λ, joille operaattori $S - \lambda$ ei ole kääntyvä (tässä λ merkitsee myös operaattoria $x \mapsto \lambda x$).

Osoitetaan, että operaattori $S - \lambda$ on kääntyvä jos ja vain jos operaattori $S^* - \overline{\lambda}$ on kääntyvä. Huomataan, että jos $x, y \in H$ niin

$$((S - \lambda)x|y) = (Sx|y) - (\lambda x|y) = (x|S^* y) - (x|\overline{\lambda} y) = (x|(S^* - \overline{\lambda})y).$$

Siis operaattorit $S - \lambda$ ja $S^* - \overline{\lambda}$ ovat toistensa adjungaatteja. Operaattori on kääntyvä jos ja vain jos sen adjungaatti on kääntyvä, joten väite on todistettu.

Siis $\lambda \in \sigma(S)$ jos ja vain jos $\overline{\lambda} \in \sigma(S^*)$.

Oletetaan nyt, että S on itseadjungoitu. Ensinnäkin jos $(S - \lambda)x = 0$ jollain $x \in H \setminus \{0\}$, niin

$$\lambda(x|x) = (\lambda x|x) = (Sx|x) = (x|Sx) = (x|\lambda x) = \overline{\lambda}(x|x).$$

Siis täytyy olla $\lambda = \overline{\lambda}$, eli $\lambda \in \mathbb{R}$.

Olkooon nyt $\lambda \in \sigma(S)$. Tällöin operaattori $S - \lambda$ ei ole bijektio. Jos se ei ole injektio, on olemassa $x \in H \setminus \{0\}$ siten, että $(S - \lambda)x = 0$ ja täten $\lambda \in \mathbb{R}$. Voidaan siis olettaa, että $S - \lambda$ ei ole surjektio.

Osoitetaan nyt välitulos. Jos $T : H \to H$ on lineaarinen operaattori, niin

$$(\mathrm{Im}\ T)^\perp = \mathrm{Ker}\ T^*.$$

Meille itseasiassa riittää vain sisältyminen $(\mathrm{Im}\ T)^\perp \subset \mathrm{Ker}\ T^*$. Tätä varten, jos $x \in (\mathrm{Im}\ T)^\perp$, niin

$$0 = (x|Ty) = (T^* x|y) \quad \text{kaikilla } y \in H.$$

Siis täytyy olla $T^* x = 0$, eli $x \in \mathrm{Ker}\ T^*$. Saadaan siis haluttu sisältyminen. Yhtäsuuruus jätetään harjoitustehtäväksi.

Sovelletaan aputulosta operaattoriin $T = S - \lambda$. Koska T ei ole surjektio, aliavaruus $(\mathrm{Im}\ T)^\perp$ on epätriviaali. Koska $(\mathrm{Im}\ T)^\perp \subset \mathrm{Ker}\ T^*$, myös aliavaruus $\mathrm{Ker}\ T^*$ on epätriviaali. Koska

$$T^* = (S - \lambda)^* = S - \overline{\lambda},$$

on täten olemassa jokin $x \in H \setminus \{0\}$ siten, että

$$(S - \overline{\lambda})x = 0.$$

Edellisen nojalla täytyy siis olla $\overline{\lambda} = \overline{\overline{\lambda}}$. Siis $\lambda \in \mathbb{R}$, kuten haluttiin.

Täten $\sigma(S) \subset \mathbb{R}$.

3. Olkoon H kompleksinen Hilbert-avaruus. Operaattori $T \in \mathcal{L}(H)$ on *positiivinen* mikäli $(Tx|x) \geq 0$ kaikilla $x \in H$.

(i) Näytä, että kahden positiivisen operaattorin summa on positiivinen.

(ii) Onko kahden positiivisen operaattorin S, T yhdiste ST aina positiivinen?

(iii) Osoita, että T^2 on positiivinen mikäli T on itseadjungoitu. Onko tulos voimassa myös operaattorille T^3 ?

Ratkaisu 3.

Kohta (i). Jos S ja T ovat positiivisia, niin

$$((S+T)x|x) = (Sx|x) + (Tx|x) \geq 0$$

kaikilla $x \in H$. Siis $S+T$ on positiivinen.

Kohta (ii). Määritellään matriisit

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tulkitaan matriisit operaattoreina $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Molemmat ovat positiivisia operaattoreita, sillä

$$(Tx|x) = (x_1 - x_2)\overline{x_1} + (x_2 - x_1)\overline{x_2} = (x_1 - x_2)(\overline{x_1} - \overline{x_2}) = |x_1 - x_2|^2 > 0$$

ja

$$(Sx|x) = x_1\overline{x_1} + 0 \cdot \overline{x_2} = |x_1|^2 > 0.$$

Toisaalta

$$(STx|x) = (x_1 - x_2)\overline{x_1} + 0 \cdot \overline{x_2} = |x_1|^2 - x_2\overline{x_1}.$$

Tämä ei välttämättä ole positiivinen reaaliluku kaikilla $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$. Siis ST ei ole positiivinen.

Kohta (iii). Jos T on itseadjungoitu, niin T^2 on positiivinen sillä

$$(T^2x|x) = (Tx|Tx) = \|Tx\|_H^2 \geq 0.$$

Olkoon nyt $H \neq \{0\}$ Hilbertin avaruus. Määritellään itseadjungoitu operaattori T kaavalla $Tx = -x$. Tällöin $T^3 = T$. Operaattori T ei selvästi ole positiivinen, joten tulos ei ole yleisesti voimassa operaattorille T^3.

4. (i) Olkoot $a, b \in \mathbb{C}$ kompleksilukuja joille

$$\lambda a + \overline{\lambda}\,\overline{b} \in \mathbb{R} \qquad \text{kaikilla} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Näytä, että silloin $a = b$.

(ii) Näytä että jokainen positiivinen operaattori (kompleksisella Hilbert-avaruudella) on itseadjungoitu.

Ratkaisu 4.

Kohta (i). Olkoon a ja b kompleksilukuja kuten tehtävänannossa. Huomataan, että

$$\lambda a + \overline{\lambda a} = 2\,\mathrm{Re}(\lambda a) \in \mathbb{R}.$$

Siis oletuksen mukaan myös $\overline{\lambda}(\overline{b} - \overline{a}) = \lambda a + \overline{\lambda b} - \big(\lambda a + \overline{\lambda a}\big) \in \mathbb{R}$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{C}$. Tämä on mahdollista ainoastaan silloin, kun $\overline{b} = \overline{a}$. Siis $a = b$.

Kohta (ii). Olkoon $x, y \in H$. Sovelletaan kohtaa (i) lukuihin

$$a = (Tx|y) \quad \text{ja} \quad b = (x|Ty).$$

Lasketaan ensin, että

$$\begin{aligned}
\lambda a + \overline{\lambda b} &= \lambda(Tx|y) + \overline{\lambda(x|Ty)} \\
&= (T\lambda x|y) + \overline{\lambda}(Ty|x) \\
&= (T\lambda x|y) + (Ty|\lambda x).
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$(T(\lambda x + y)|\lambda x + y) = (T\lambda x|\lambda x) + (T\lambda x|y) + (Ty|\lambda x) + (Ty|y).$$

Siis

$$\lambda a + \overline{\lambda b} = (T\lambda x|y) + (Ty|\lambda x) = (T(\lambda x + y)|\lambda x + y) - (T\lambda x|\lambda x) - (Ty|y).$$

Koska T oli positiivinen operaattori, ylläolevan yhtälön oikeammaisella puolella jokainen termi on reaalinen. Siis myös vasen puoli on reaaliluku kaikilla $\lambda \in \mathbb{C}$. Kohdan (i) nojalla täytyy olla $a = b$, eli

$$(Tx|y) = (x|Ty)$$

kaikilla $x, y \in H$. Siis T on itseadjungoitu.

5. Olkoon $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ yksinkertaisin Volterra operaattori, eli

$$Tf(x) := \int_0^x f(x).$$

(i) Näytä, että $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ on kompakti operaattori.

(ii) Osoita, että $\|T^n\| \to 0$ as $n \to \infty$.

Ratkaisu 5.

Kohta (i). Osoitetaan ensin, että Volterran operaattori T on kompakti lineaarinen operaattori avaruudesta $L^2(0,1)$ avaruuteen $C(0,1)$. Tarkistetaan, että jos $f \in L^2(0,1)$ niin $Tf \in C(0,1)$. Tämä onnistuu arviolla

$$|Tf(x+\epsilon) - Tf(x)| = \left| \int_x^{x+\epsilon} f(t)dt \right| \le \left(\int_x^{x+\epsilon} 1dt \right)^{1/2} \left(\int_x^{x+\epsilon} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \le \sqrt{\epsilon}\|f\|_{L^2(0,1)}, \tag{1}$$

missä olemme käyttäneet Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä. Selvästi $T : L^2(0,1) \to C(0,1)$ on myös rajoitettu operaattori.

Osoitetaan nyt Arzela-Ascolin lauseen avulla, että joukko $T(B_{L^2}(0,1))$ on relatiivisesti kompakti. Ensinnäkin joukko on rajoitettu sup-normin suhteen, sillä T on rajoitettu operaattori. Toiseksi joukon funktiot ovat yhtäjatkuvia. Nimittäin jos $\epsilon > 0$, valitaan $\delta = \epsilon^2$ ja tällöin kaikilla $x, y \in [0,1]$ joille $|x - y| \leq \delta$ pätee arvion (1) nojalla

$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq \sqrt{|x-y|}\|f\|_{L^2(0,1)} \leq \sqrt{\delta} \cdot 1 = \epsilon.$$

Siis T on kompakti kuvauksena $L^2(0,1) \to C(0,1)$.

Osoitetaan vielä, että joukko $T(B_{L^2}(0,1))$ on relatiivisesti kompakti myös avaruudesa $L^2(0,1)$. Palautetaan mieleen, että pätee arvio

$$\|f\|_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{C(0,1)},$$

kaikilla $f \in C(0,1)$. Siis avaruuden $L^2(0,1)$ topologia on karkeampi joukossa $C(0,1)$ kuin avaruuden $C(0,1)$ tavallinen topologia. Erityisesti jokainen relatiivisesti kompakti joukko avaruudessa $C(0,1)$ on relatiivisesti kompakti myös avaruudessa $L^2(0,1)$. Siis joukko $T(B_{L^2}(0,1))$ on relatiivisesti kompakti myös avaruudessa $L^2(0,1)$.

Kohta (ii). Osoitettiin jo tehtävän HARJ4/TEHT6* mallivastauksessa (kun valitaan $K(t,s) = 1$).

6*[1] Osoita, että edellisen tehtävän Volterra-operaattorille pätee $\sigma(T) = \{0\}$ (tämä osoittaa, että ei-itseadjungoidut – jopa kompaktit – operaattorit käyttäytyvät aivan eri tavoin kuin itse-adjungoidut).

Ratkaisu 6.

Huomataan, että Volterran operaattori $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ ei ole kääntyvä. Tämä osoitettiin jo tehtävän 5 kohdassa (i) kun näytettiin, että T kuvaa avaruuden $L^2(0,1)$ funktiot jatkuviksi funktioiksi. Volterran operaattori ei siis ole surjektio. Täten operaattori $T = T - 0$ ei ole kääntyvä, joten $0 \in \sigma(T)$.

Olkoon nyt $\lambda \neq 0$. Osoitetaan, että operaattori $T - \lambda$ on kääntyvä. Kirjoitetaan se muodossa

$$T - \lambda = -\lambda\left(1 - \frac{T}{\lambda}\right).$$

Jotta tämä operaattori olisi kääntyvä, riittää näyttää että operaattori $1 - T/\lambda$ on kääntyvä. Tätä varten tarvitsee tehtävän HARJ7/TEHT4 nojalla riittää löytää jokin kokonaisluku $k_0 \geq 2$, jolle pätee

$$\|(T/\lambda)^{k_0}\|_{L^2} < 1. \tag{2}$$

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Käytetään nyt tehtävän HARJ4/TEHT6* todistusta hyväksi (kun valitaan $K(t,s) = 1$). Malliratkaisussa näytettiin, että jollekin vakiolle K_0 pätee

$$\|T^n\|_{L^2} \leq \frac{K_0^n}{n!}$$

kaikilla $n \geq 1$. Erityisesti

$$\|(T/\lambda)^n\|_{L^2} \leq \frac{K_0^n}{\lambda^n n!}.$$

Epäyhtälön oikea puoli lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$. Valitsemalla n riittävän suureksi, saadaan vasen puoli pienemmäksi kuin yksi. Siis ehto (2) toteutuu, ja operaattori $T - \lambda$ on kääntyvä. Täten $\lambda \notin \sigma(T)$, kun $\lambda \neq 0$.

Siis $\sigma(T) = \{0\}$.