FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

10. HARJOITUKSET (ti 15.4, 10-12 salissa C124) Huom aika ja paikka!

1. Olkoon E äärellisulotteinen normiavaruus. Näytä, että jokainen lineaarinen funktionaali $f : E \to \mathbb{K}$ on jatkuva, toisin sanoen, $E^* = E^\dagger$.

Ratkaisu 1.

Olkoon $f : E \to \mathbb{K}$ lineaarinen funktionaali. Valitaan avaruudelle E kanta $v_1, \ldots, v_n$. Merkitään

$$M = \sup_{k=1,\ldots,n} |f(e_k)|$$

Jos nyt $x = \sum_{k=1}^n x_k v_k$ on mielivaltainen vektori avaruudessa E, niin

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^n x_k f(v_k)\right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k||f(v_k)| \leq M \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

On helppo tarkistaa, että kuvaus

$$x \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$$

määrittelee normin avaruudessa E (joka ei välttämättä ole avaruuden E alkuperäinen normi). Tehtävän HARJ1/TEHT6 nojalla jokainen äärellisulotteisen avaruuden E normi on ekvivalentti. On siis olemassa vakio C siten, että

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \leq C\|x\|_E.$$

Alkuperäisestä arviosta saadaan siis

$$|f(x)| \leq MC\|x\|_E$$

kaikilla $x \in E$. Siis f on rajoitettu eli jatkuva.

2. Näytä, että on olemassa jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi : L^\infty(0,1) \to \mathbf{R}$ jolle $\phi(f) = f(\frac{1}{2})$ kaikilla jatkuvilla funktioilla $f : [0,1] \to \mathbf{R}$.

Ratkaisu 2.

Tulkitaan normiavaruus $C(0,1)$ avaruuden $L^\infty(0,1)$ aliavaruutena. Avaruus $C(0,1)$ on Banach, joten se on avaruuden $L^\infty(0,1)$ suljettu aliavaruus.

Avaruudessa $C(0,1)$ voidaan määritellä lineaarinen funktionaali $g : C(0,1) \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$g(f) = f(\frac{1}{2}).$$

Tämä on selvästi hyvinmääritelty ja lineaarinen kuvaus. Osoitetaan nyt, että kuvauksella g on laajennus koko avaruuteen $L^\infty(0,1)$ käyttämällä Hahn-Banachin lausetta (Lause 9.11 muistiinpanoissa). Huomataan, että kuvaukselle g pätee

$$|g(f)| = |f(\frac{1}{2})| \leq \|f\|_\infty$$

kaikilla $f \in C(0,1)$. Jos valitaan avaruuden E (semi)normiksi siis normi $\|\cdot\|_\infty$, niin Hahn-Banachin lause takaa, että on olemassa lineaarinen funktionaali $\phi : L^\infty(0,1) \to \mathbb{R}$ jolle pätee

$$|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty$$

kaikilla $f \in L^\infty(0,1)$ ja $\phi(f) = g(f) = f(1/2)$ kaikilla $f \in C(0,1)$. Siis väite on todistettu.

3. Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinnitetty jatkuva funktio $[0,1] \to \mathbb{R}$. Tutki Arzela-Ascolin lauseen avulla onko joukko $\{g_s : 0 \leq s \leq 1\}$ relatiivisesti kompakti avaruudessa $C(0,1)$, kun

$$g_s(t) = g((s+t)/2), \quad t \in [0,1] \text{ ja } s \in [0,1].$$

Ratkaisu 3.

Todistetaan, että joukko $S = \{g_s : 0 \leq s \leq 1\}$ on relatiivisesti kompakti avaruudessa $C(0,1)$. Tarkistetaan ensin, että joukon S funktiot ovat tasaisesti rajoitettuja. Tämä on helppoa, sillä

$$\|g_s(t)\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |g((s+t)/2)| \leq \|g\|_\infty$$

kaikilla $s \in [0,1]$.

Tarkistetaan seuraavaksi, että g:n funktiot ovat yhtäjatkuvia. Olkoon tätä varten $\epsilon > 0$. Koska g on jatkuva funktio kompaktilla välillä, se on tasaisesti jatkuva. Valitaan siis $\delta > 0$ siten, että

$$|g(x) - g(y)| \leq \epsilon$$

aina kun $|x-y| \leq \delta$, $x, y \in [0,1]$. Nyt jos $s \in [0,1]$ ja $|x-y| \leq 2\delta$, niin

$$\left|\frac{s+x}{2} - \frac{s+y}{2}\right| \leq \delta.$$

Täten

$$|g_s(x) - g_s(y)| = |g((s+x)/2) - g((s+y)/2)| \leq \epsilon.$$

Siis joukon S funktiot ovat yhtäjatkuvia. Arzela-Ascolin lauseen nojalla S on relatiivisesti kompakti.

4. Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ jono. Sanotaan, että (x_n) suppenee *heikosti* avaruudessa E kohti vektoria $x \in E$, jos $x^*(x) = \lim_n x^*(x_n)$ kaikilla $x^* \in E^*$. (Merkintä: $x_n \xrightarrow{w} x$ kun $n \to \infty$).

Tutki, suppeneeko jono (e_n) heikosti avaruudessa X kun kun $e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ (ykkönen n:ssä paikassa), ja

(i) $X = c_0$.

(ii) $X = \ell^1$.

(iii) $X = \ell^p$, $1 < p < \infty$.

Ratkaisu 4.

Kohta (i). Käytetään hyväksi tehtävää HARJ9/TEHT5, jonka mukaan $(c_0)^* = \ell^1$. Siis jos $\lambda \in (c_0)^*$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, niin on olemassa jono $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ siten, että

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \quad \text{kaikilla } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0.$$

Siispä

$$\lambda(e_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (e_n)_k y_k = y_n$$

kaikilla n. Koska $y \in \ell^1$, pätee $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Siis

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(e_n) = 0 = \lambda(0).$$

Siis jono e_n suppenee määritelmän mukaan heikosti kohti nollavektoria avaruudessa c_0.

Kohta (ii). Käytetään hyväksi tehtävää HARJ9/TEHT2, jonka mukaan $(\ell^1)^* = \ell^\infty$. Siis jos $\lambda \in (\ell^1)^*$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, niin on olemassa jono $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ siten, että

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \quad \text{kaikilla } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$

Siispä

$$\lambda(e_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (e_n)_k y_k = y_n$$

kaikilla n. Kohdasta (i) poiketen jonolla y_n ei välttämättä ole raja-arvoa. Valitsemalla esimerkiksi $y = (1, 0, 1, 0, \dots)$ nähdään, että jonolla $\lambda(e_n)$ ei ole raja-arvoa. Siis jono e_n ei voi supeta heikosti avaruudessa ℓ^1.

Kohta (iii). Käytetään hyväksi luentomonisteen väitettä sivulla 160, jonka mukaan $(\ell^p)^* = \ell^q$, missä q on eksponentin p Hölder-konjugaatti. Siis jos $\lambda \in (\ell^p)^*$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, niin on olemassa jono $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ siten, että

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \quad \text{kaikilla } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p.$$

Siispä

$$\lambda(e_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (e_n)_k y_k = y_n$$

kaikilla n. Nyt koska $y \in \ell^q$ (missä $1 < q < \infty$) pätee $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Siis

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(e_n) = 0 = \lambda(0).$$

Siis jono e_n suppenee määritelmän mukaan heikosti kohti nollavektoria avaruudessa ℓ^p.

5. Olkoot E ja F Banach-avaruuksia. Operaattori $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on äärellisulotteinen mikäli jollakin $m \geq 1$ on olemassa vektorit $x_1, \dots, x_m$ sekä $y_1^*, \dots, y_m^*$ joille pätee

$$Tx = \sum_{k=1}^{m} y_k^*(x) x_k.$$

(i) Osoita että jokainen äärellisulotteinen operaattori on kompakti.

(ii) Osoita että $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on äärellisulotteinen jos ja vain jos kuva-avaruus $T(E)$ on äärellisulotteinen (avaruuden F aliavaruus).

Ratkaisu 5.

Kohta (i). Olkoon $T \in \mathcal{L}(E,F)$ äärellisulotteinen. On osoitettava, että joukko $TB_E(0,1)$ on relatiivisesti kompakti. Kohdassa (ii) todistetaan, että operaattorin T kuva-avaruus on äärellisulotteinen. Jokainen äärellisulotteinen aliavaruus on suljettu avaruudessa F, joten joukon $TB_E(0,1)$ sulkeuma sisältyy operaattorin T kuva-avaruuteen. Koska T on rajoitettu operaattori, joukko $TB_E(0,1)$ on rajoitettu. Siis sen sulkeuma on suljettu ja rajoitettu. Äärellisulotteisessa avaruudessa jokainen suljettu ja rajoitettu joukko on kompakti, joten joukko $TB_E(0,1)$ on relatiivisesti kompakti avaruudessa F.

Kohta (ii). Jos T on äärellisulotteinen, niin määritelmän mukaan

$$Tx = \sum_{k=1}^{m} y_k^*(x) x_k \in \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$$

kaikilla $x \in E$. Siis T:n kuva-avaruus on ääärellisulotteinen.

Jos operaattorin T kuva-avaruus on äärellisulotteinen, niin voidaan kirjoittaa $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ jollain vektoreilla $x_1, \dots, x_n$. Määritellään kuvaukset y_k^* kaavalla

$$y_k^*(x) = \mathrm{proj}_k Tx,$$

missä proj_k merkitsee projektiota vektorin x_k virittämälle aliavaruudelle avaruudessa $\mathrm{Im}\, T$. Nämä kuvaukset ovat kahden jatkuvan lineaarikuvauksen yhdisteenä myöskin jatkuvia lineaarisia kuvauksia. Lisäksi jos $x \in E$, niin voidaan kirjoittaa $Tx = \sum_{k=1}^{n} z_k x_k$ jollain luvuilla z_k. Siis

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} z_k x_k = \sum_{k=1}^{m} y_k^*(x) x_k,$$

eli T on äärellisulotteinen kuten haluttiin.

6* Olkoon Banach-avaruuden E duaaliavaruus E^* separoituva. Osoita, että E on separoituva. Päteekö käänteinen tulos ?

Ratkaisu 6. Olkoon E^* separoituva. Tällöin sillä on numeroituva tiheä osajoukko $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$. Lineaarisen funktionaalin normin määritelmän nojalla jokaiselle n on olemassa vektori $z_n \in E \setminus \{0\}$ siten, että

$$|x_n^*(z_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n^*\|\|z_n\|_E.$$

Määritellään nyt vektorit x_n kaavalla $x_n = z_n/\|z_n\|_E$. Tällöin $\|x_n\|_E = 1$ kaikilla n. Osoitetaan, että aliavaruus

$$M = \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

on tiheässä avaruudessa E. Tätä varten käytetään Hahn-Banachin lauseen seurausta 9.22. On osoitettava, että jos $\lambda \in E^*$ on sellainen, että

$$\lambda(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in M,$$

niin tällöin $\lambda = 0$. Jos $\lambda \in E^*$ on kuten yllä, niin joukon $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ tiheyden nojalla jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa jokin duaalin alkio x_n^* siten, että

$$\|\lambda - x_n^*\| \leq \epsilon.$$

Vektori x_n kuuluu aliavaruuteen M, joten $\lambda(x_n) = 0$. Täten

$$\begin{aligned}
0 = |\lambda(x_n)| &= |\lambda(x_n) - x_n^*(x_n) + x_n^*(x_n)| \\
&\geq |x_n^*(x_n)| - |(\lambda - x_n^*)(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n^*\|\|x_n\|_E - \epsilon\|x_n\|_E \\
&= \frac{\|x_n^*\|}{2} - \epsilon.
\end{aligned}$$

Täten $\|x_n^*\| \leq 2\epsilon$. Toisaalta nyt

$$\|\lambda\| \leq \|\lambda - x_n^*\| + \|x_n^*\| \leq \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon.$$

Siis on oltava $\lambda = 0$. Lopputulos on, että E on separoituva koska sen tiheällä aliavaruudella M on numeroituva kanta.

Käänteinen tulos ei päde, sillä avaruus ℓ^1 on separoituva, mutta sen duaali ℓ^∞ ei ole.

Vihjeitä:

T.1: [Tarkastele kantavektorien kuvia.]

T.2: [Huomaa, että $C(0,1) \subset L^\infty(0,1)$ on suljettu aliavaruus (helppo) ja sovella Hahn-Banachia.]

T.3: [Funktion g tasaisesta jatkuvuudesta on hyötyä.]

T.6: [Olkoon (x_n^*) tiheä jono avaruudessa E ja valitse alkiot $x_n \in E$, joille $\|x_n\| = 1$ ja $x_n^*(x_n) \geq (1/2)\|x_n^*\|$ kaikilla n. Osoita sopivan Hahn-Banachin version avulla, että suljettu lineaarinen verho $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbf{N}\} = E$.]