FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

9. HARJOITUKSET (pe 11.3, 12-14 salissa B322)

1. Olkoon E Banachin avaruus ja $M, N \subset E$ aliavaruuksia, joille $E = M \oplus N$ (siis $E = M + N$ ja $M \cap N = \{0\}$). Osoita, että lineaarinen projektio $P : E \to E$,

$$Px := m, \quad \text{kun} \quad x = m + n \in M \oplus N = E,$$

on jatkuva jos ja vain jos M ja N ovat E:n suljettuja aliavaruuksia.

2. Osoita tarkasti, että $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ (isometrinen isomorfia).

3. Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(x_n) \subset E$ jono, jolle $\sum_{n=1}^\infty |(x|x_n)|^2 < \infty$ kaikilla $x \in E$. Näytä, että $T : E \to \ell^2$ on jatkuva lineaarikuvaus, kun asetetaan

$$Tx = ((x|x_n))_{n \in \mathbf{N}}, \quad x \in E.$$

4. (i) Olkoon $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ välin $[0, 1]$ kaikki rationaalipisteet. Asetetaan

$$x^*(f) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k 2^{-k} f(q_k), \quad \text{kun } f \in C(0, 1),$$

Näytä, että $x^* \in C(0, 1)^*$.

(ii) Laske funktionaalin x^* normi $\|x^*\|$.

(iii) Onko olemassa funktiota $f \in C(0, 1)$ jolla funktionaalin x^* normi saavutetaan, eli $\|f\|_\infty = 1$ ja $|\langle x^*, f\rangle| = \|x^*\|$.

5. Todista, että isometrisesti $(c_0)^* = \ell^1$.

6*[1] Olkoon $1 \le p < 2$. Osoita, että tällöin isometrisesti $(L^p(0, 1))^* = L^q(0, 1)$, missä $q := p/(p - 1)$ on duaalieksponentti. Tarkemmin sanottuna, osoita että jokainen duaalin alkio $\lambda \in (L^p(0, 1))^*$ voidaan esittää muodossa

$$\langle \lambda, f\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \text{kaikilla} \quad f \in L^p(0, 1),$$

missä $g \in L^q(0, 1)$ ja $\|\lambda\|_{(L^p(0,1))^*} = \|g\|_{L^q(0,1)}$.

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.1: [Päättele suljetun kuvaajan lauseen avulla, että P on jatkuva , jos M ja N ovat suljettuja.]

T.2: [Jos $\lambda \in (\ell^1)^*$, tarkastele jonoa $y_k := \langle \lambda, e_k \rangle$, missä e_k on k:s yksikkövektori avaruudessa ℓ^1. Vertaa luentojen todistukseen duaaliteetista $(\ell^p)^* = \ell^q$, tosin nyt kyseessä oleva todistus on helpompi]

T.3: [Muista suljetun kuvaajan lause!]

T.5: [Vrt. vihje tehtävään 3.]

T.6: [Hoida ensin tapaus $p = 2$ Frechet-Rieszin lausen avulla. Tapauksessa $1 \leq p < 2$ totea ensin, että jos $\lambda \in (L^p(0,1))^*$, niin silloin kuvaus

$$f \mapsto \langle \lambda, f \rangle, \quad f \in L^2(0,1)$$

määrittelee jatkuvan lineaarisen funktionaalin myös avaruudella $L(0,1)$, jolloin saat integraaliesityksen λ:lle.]