FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

7. HARJOITUKSET (pe 28.3, 12-14 salissa B322)

1. Anna esimerkki jatkuvista lineaarisista kuvauksista $S, T \in \mathcal{L}(E)$ (sopivassa Banach avaruudessa E), joille pätee $\|ST\|_E < \|S\|_E \|T\|_E$. Voitko valita $S = T$?

2. Olkoon $g \in C(0,1)$. Määritellään operaattori T_g asettamalla

$$T_g f(x) \ := \ g(x)f(x).$$

(i) Osoita, että $T_g \in \mathcal{L}(C(0,1))$, eli että se on jatkuva lineaarinen operaattori avaruudelta $C(0,1)$ itselleen.

(ii) Johda kaava normille $\|T_g\|$.

(iii) Milloin operaattori $T_g : C(0,1) \to C(0,1)$ on injektio?

(iv) Milloin operaattori $T_g : C(0,1) \to C(0,1)$ on kääntyvä ja mikä on sen käänteisoperaattori?

3. Olkoon $1 \le p \le \infty$. Esitä jokin isomorfismi $T : L^p(0,1) \to E$ kun a) $E = L^p(-2,2)$, ja b) $E = L^p(0,\infty)$.

4. Olkoon E Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(E)$ operaattori jolle $\|T^{k_0}\| < 1$ jollakin $k_0 \ge 2$. Yleistä Neumannin sarjaa koskeva lause yleistys, osoittamalla että myös tällöin $\mathrm{I} - T$ on kääntyvä (vrt. luentomonisteen lause 6.18) ja käänteisoperattorilla on esitys suppenevana sarjana

$$(\mathrm{I} - T)^{-1} \ = \ \mathrm{I} + T + T^2 + T^3 + \ldots.$$

5. Olkoon $T \in \mathcal{L}(H)$ Hilbertin avaruuden H jatkuva operaattori, jolle pätee

$$|(Tx|x)| \ge c\|x\|^2$$

Näytä, että T on kääntyvä operaattori.

6^{*1} Osoita, etteivät avaruudet ℓ^1 ja ℓ^2 ole keskenään isomorfiset. Tee se kahdessa vaiheessa:

(i) Osoita induktiolla n:n suhteen suunnikasyhtälön yleistys:, kaikilla avaruuden ℓ^2 vektoreilla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pätee

$$\sum \|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n\|_{\ell^2}^2 = 2^{n-1}\big(\|x_1\|_{\ell^2}^2 + \|x_2\|_{\ell^2}^2 + \ldots + \|x_n\|_{\ell^2}^2\big).$$

Vasemmalla puolella summataan yli kaikkien mahdollisten etumerkkien valintojen, eli summassa on 2^{n-1} termiä

(ii) vastaoletuksen mukaan on olemassa lineaarinen jatkuva ja kääntyvä kuvaus $T : \ell^1 \to \ell^2$, jolloin erityisesti jollakin positiivisella vakiolla $C > 0$ pätee

$$C^{-1}\|x\|_{\ell^1} \leq \|Tx\|_{\ell^2} \leq C\|x\|_{\ell^1} \qquad \text{kaikilla} \quad x \in \ell^1.$$

Sovella kohdan (i) identiteettiä vektoreihin $x_k := Te_k$, $1 \leq k \leq n$, missä e_k on avaruuden ℓ^1 k:s yksikkövektori. Johda ristiriita riittävän suurilla n.

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.3: [Jälkimmäisessä tapauksessa T voisi olla vaikka muotoa $Tf(x) = g(x)f\big(h(x)\big)$ sopivilla funktioilla g ja h.]

T.4: [Matki luentojen lauseen 6.18 todistusta. Estimoidessasi sarjan absoluuttista suppenemista huomaa, että $\|T^{nk_0}\| \le c^n$ kaikilla $n \ge 1$.]

T.5: [Osoita ensin, että annetusta ehdosta seuraa, että T on alhaalta rajoitettu, mikä takaa injektiivisyyden ja käänteiskuvauksen jatkuvuuden mikäli se on olemassa. Osoita surjektiivisuus näyttämällä ensin että kuva-aliavaruus $M := T(H)$ on suljettu, ja käytä annettua ehtoa varmistamaan, että $M^\perp = \{\bar{0}\}$.]