FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

6. HARJOITUKSET (ti 11.3, 10-12 salissa C124, HUOM AIKA JA PAIKKA!)

1. Kurssikoe Ke 12.3 9-12 salissa C124

1. Olkoon $M = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$.

(i) Määrää ortokomplementti $M^\perp$ avaruudessa $L^2(0,1)$.

(ii) Laske funktion $g(x) = e^x$ etäisyys aliavaruudesta M.

2. Osoita, käyttäen sopivaa Dirichlet-ytimen D_n määritelmää, että kuvaus $f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x-t)f(t)dt$ on projektio äärellisulotteiselle $L^2(0,2\pi)$:n aliavaruudelle. Mikä kyseinen aliavaruus on?

3. Jos $f(x)$ on jatkuvasti derivoituva 2π-periodinen funktio, osoita että silloin $\widehat{(f')}(n) = in\widehat{f}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

4. Olkoon $f(x)$ jatkuvasti derivoituva 2π-periodinen funktio. Osoita, että f:n Fourier sarja suppenee itseisesti.

5. Olkoon $f \in L^2(0,2\pi)$ sellainen funktio, että Fourier sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$ suppenee itseisesti.

(i) Osoita, että Fourier osasummat suppenevat tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota $g \in C(0,2\pi)$, eli $s_n(f;x) \to g(x)$ tasaisesti välillä $[0,2\pi]$, kun $n \to \infty$.

(ii) Lue luentomonisteesta Seuraus 5.5 (s. 95). Osoita sen avulla, että $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in [0,2\pi]$.

(iii) Totea erityisesti, että jatkuvan funktion Fourier-kertoimet määräävät kyseisen funktion yksikäsitteisesti.

6*[1] Avaruuden $L^2(-1,1)$ funktiota f sanotaan parilliseksi, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in [-1,1]$ ja parittomaksi, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla $x \in [-1,1]$.

(i) Osoita, että parillisten funktioiden ja parittomien funktioiden joukot ovat toistensa ortokomplementteja avaruudessa $L^2(-1,1)$.

(ii) Osoita, että jokainen parillinen funktio f avaruudessa $L^2(-1,1)$ voidaan kirjoittaa (L^2-mielessä) sarjana

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\pi n x).$$

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.1: [Kohdassa (i) etsi funktioille $f \in L^2(0,1)$ yksikäsitteinen esitys $f = f_1 + f_2$, missä $f_1 \in M$ ja $f_2 \in M^{\perp}$.]

T.3: [Osittaisintegrointi!]

T.4: [Hyödynnä Tehtävää 3, ja arvioi sarjaa $\sum |\widehat{f}(n)|$ Cauchy-Schwarzin avulla.]