FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

5. HARJOITUKSET (pe 28.2, 12-14 salissa B322)

1. Jono $e_n(t) = e^{2\pi i n t} = (\cos(nt) + i\sin(nt))$, $\quad n \in \mathbb{Z}$, on ortonormaali avaruudessa $L^2(0,1)$. Laske funktion $g(t) = t$ Fourier kertoimet $(g|e_n)$. Kirjoita tilannetta vastaava Besselin epäyhtälö.

2. Olkoon M Hilbertin avaruuden E aliavaruus. Osoita, että aina

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}.$$

3. Mikäli Hilbertin avaruuden alkiolle x ja jonolle (x_n) pätee

$$(x_n|y) \to (x|y) \quad \text{kaikilla} \quad y \in E,$$

niin sanomme että x_n suppenee kohti alkiota x heikosti avaruudessa E.

(i) Olkoon (e_n) ON-jono E:ssä. Osoita, että $e_n \to \overline{0}$ heikosti kun $n \to \infty$.

(ii) Totea, että kohdan (i) nojalla heikko suppeneminen ei implikoi normikonvergenssia. Osoita kuitenkin, että jos jono (x_n) suppenee kohti vektoria x heikosti ja lisäksi $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, niin silloin $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

4. Tässä tehtävässä tarkastellaan Hilbertin avaruutta $L^2(0,1)$.

(i) Esim. sovella Gram-Schmidtin ortogonalisointia, ja etsi ortonormaali kanta joukon

$$M := \{1, x, x^2\}$$

virittämälle aliavaruudelle

(ii) Mikä on funktion x^3 etäisyys aliavaruudesta M, eli ratkaise minimointitehtävä

$$\min_{a,b,c} \int_0^1 |a + bx + cx^2 - x^3|^2 dx$$

(iii) Totea, että projektio $P_M : L^2(0,1) \to M$ voidaan kirjoittaa integraalioperaattorina

$$P_M f(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

Mikä on ytimen K eksplisiittinen lauseke?

5. Osoita, että luentomonisteen sivulla 86 esimerkissä 4.43 määritelty Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=0}^{\infty} \subset L^2(0,1)$ on Hilbert-avaruuden $L^2(0,1)$ kanta etenemällä seuraavien askeleitten kautta (käyttäen mittateorian tietoja, kaikkia yksityiskohtia ei tarvita, selvä idea riittää):

(i) Totea ensin, että konstruktion nojalla Haarin systeemi tuottaa ortonormaalin jonon

(ii) dyadisten välien Δ_k karakteristiset funktiot $\chi_{\Delta_k} \in \mathrm{span}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ kaikilla k,

(iii) $\chi_G \in \overline{\mathrm{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ kaikilla avoimilla joukoilla $G \subset [0,1]$,

(iv) $\chi_A \in \overline{\mathrm{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ kaikilla mitallisilla joukoilla $A \subset [0,1]$,

(v) kaikki yksinkertaiset funktiot $f \in \overline{\mathrm{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$,

(vi) vihdoin $L^2(0,1) = \overline{\mathrm{span}}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$.

6^{*1} Tarkastellaan sisätulon $(f|g) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x^2} dx$ määräämää painotettua L^2-avaruutta, eli Hilbertin avaruutta $E = L^2(w)$, $w(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$.

(i) Osoita, että jokainen polynomi $P(x) \in E$, ja että kaikille polynomeille P ja Q pätee

$$(P \,|\, A_+ Q) = (A_- P \,|\, Q)$$

missä $A_+\phi = -\phi'(x) + 2x\phi(x)$ ja $A_-\phi = \phi'(x)$.

(ii) Hermiten polynomit H_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ määritellään kaavalla $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$. Osoita, että funktiot $e_n := (2^n n!)^{-1/2} H_n$ muodostavat ortonormaalin jonon Hilbertin avaruudessa $E = L^2(w)$.

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.2: [(i)Muista Besselin epäyhtälö!]

T.5: [(i): Osoita, että kyseinen joukko on suljettu ja konveksi.]

T.6: [Osoita, että $A_+H_n(x) = H_{n+1}(x)$ ja $A_-H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$. Voit olettaa tunnetuksi, että $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. .]