FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

4. HARJOITUKSET (pe 21.2, 12-14 salissa B322)

1. Osoita, että avaruudet $L^p(0,1)$, $p \in [1,\infty] \setminus \{2\}$ eivät ole Hilbert-avaruuksia.

2. Olkoon E Banach-avaruus. **(i)** Oletetaan, että $\phi : E \to E$ on kuvaus, jolle kolminkertainen iteraatti $\psi := \phi\circ\phi\circ\phi$ on aito kontraktio. Osoita, että yhtälöllä $x = \phi(x)$ on yksikäsitteinen ratkaisu E:ssä.

(ii) Olkoon $\phi : E \to E$ on kontraktio (joka ei välttämättä ole aito). Onko tällöin aina yhtälöllä $x = \phi(x)$ ratkaisu E:ssä ?

3. Olkoon E sisätuloavaruus ja $x_n, x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, vektoreita joille

(a) $\|x_n\| \to \|x\|$ ja (b) $(x_n|x) \to \|x\|^2$, kun $n \to \infty$.

Näytä, että jos molemmat ehdot (a) ja (b) ovat voimassa, silloin $\|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$, mutta kumpikaan ehto erikseen ei tähän riitä.

4. Näytä, että vektorit f_k, $k \in \mathbb{Z}$ ovat keskenään ortogonaalisia avaruudessa $L^2(0,1)$, kun

$$f_k(x) := e^{2\pi ikx}, \quad x \in [0,1].$$

5. **(i)** Osoita, että Hilbert-avaruuden $L^2(0,1)$ osajoukosta

$$\{f \in L^2(0,1) \ : \ \int_0^{1/2} f(x)dx = 0 \quad \text{ja} \quad \int_{1/2}^1 f(x)dx = 1\}$$

löytyy (avaruuden $L^2(0,1)$) normin minimoiva alkio. Osaatko keksiä mikä kyseinen alkio on?

(ii) Osoita, ettei avaruuden $C(0,1)$ osajoukosta

$$\{f \in C(0,1) \ : \ \int_0^{1/2} f(x)dx = 0 \quad \text{ja} \quad \int_{1/2}^1 f(x)dx = 1\}$$

löydy (avaruuden $L^2(0,1)$) normin minimoivaa alkiota!

6*[1] Olkoon $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tarkastellaan Volterran operaattoria $T : C(0,1) \to C(0,1)$,

$$Tf(t) = \int_0^t K(t,s)f(s)ds.$$

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Osoita, että riittävän suurilla n operaattorin T iteraatti T^n on kontraktio avaruudessa $C(0,1)$. Osoita tämän tuloksen ja HT4/Teht.5 avulla että jokaisella $g \in C(0,1)$, integraaliyhtälöllä

$$f(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds = g(t), \qquad t \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0,1)$.

Vihjeitä:

T.1: [Testaa suunnikasepäyhtälöä sopivilla helpoilla funktioilla!]

T.5: [(i): Osoita, että kyseinen joukko on suljettu ja konveksi.]

T.8: [Selvitä minkälaisen lisätekijän antaa *määräämättömän* integraalin iterointi n kertaa peräkkäin.]