FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

3. HARJOITUKSET (pe 7.2, 12-14 salissa B322)

HUOM: Tällä kertaa tehtäviä enemmän, koska viikolla 6 ei ole luentoja. Viikolla 7 luennot normaalisti, lisäksi laskarien tilalla pe 14.2, 12-14 salissa B322 ylimääräinen luento.

1. **(i)** Osoita, että avaruuksille $L^p(0,1)$ (väli $(0,1)$ on varustettu tavallisella Lebesguen mitalla) pätee

$$L^r(0,1) \subset L^p(0,1) \quad \text{jos} \quad 1 \le p \le r < \infty. \tag{0.1}$$

Todista se näyttämällä, että aina

$$\|f\|_{L^p(0,1)} \le \|f\|_{L^r(0,1)} \quad \text{jos} \quad 1 \le p \le r < \infty.$$

(ii) Tarkista, että inkluusio (0.1) on aito jos $r > p$.

(iii) Onko inkluusio (0.1) voimassa jos väli (0,1) korvataan reaaliakselilla, eli tarkastellaan avaruuksia $L^p(\mathbb{R})$?

2. Todista Minkowskin epäyhtälö funktioille: jos samassa mitta-avaruudessa määritellyille mitallisille funktioille f ja g pätee $f, g \in L^p$, missä ja $1 \le p < \infty$,niin silloin

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

3. Tarkastellaan avaruuden $C(0,1)$ osajoukkoja M, varustettuna normilla $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Onko M Banach-avaruus, kun

a) $M = \{f \in C(0,1) : \ f(x) = 0 \text{ kun } 0 \le x < 1/2\}$.

b) $M = \{f \in C(0,1) : f(0) = 0 \text{ ja } f(1) = 1\}$,

c) $M = \{f \in C(0,1) : \int_0^1 f(x) = 0\}$.

4. Olkoon $f_n(x) = (-1)^n x^n/n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum f_n$ avaruudessa $C(0,1)$? Suppeneeko se absoluutisesti?

5. Tarkastellaan L^p-avaruuksien määritelmää kun $1 \le p < \infty$. Luentomonisteessa on mm. todistettu (lue kyseinen kohta!), että ekvivalenssiluokkien yhteenlasku on hyvin määritelty, eli jos $f, g, \widetilde{f}, \widetilde{g} \in L^p$ sekä $f(x) = \widetilde{f}(x)$ m.k. x ja $g(x) = \widetilde{g}(x)$ m.k. x, niin silloin $f+g = \widetilde{f}+\widetilde{g}$ mk. x.

Mieti huolellisesti vaatiiko seuraava vektoriavaruudelta vaadittava ominaisuus perustelemista: jos $f, g, h \in L^{(p)}$. niin

$$([f] + [g]) + [h] = [f] + ([g] + [h]).$$

6. Olkoon $\mathrm{Lip}(0,1)$ sellaisten funktioiden $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ joukko, joille

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|} < \infty.$$

Tällaisia funktioita kutsutaan *Lipschitz-funktioksi*

Näytä aluksi, että $\mathrm{Lip}(0,1)$ on vektoriavaruus ja että $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ on normi. Osoita sen jälkeen, että $(\mathrm{Lip}(0,1), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ on Banachin avaruus.

7. Olkoon E Banachin avaruus, ja $M \subset E$ suljettu vektorialiavaruus. Tekijä avaruus E/M koostuu ekvivalenssiluokista jotka saadaan samaistamalla vektorit $x, y \in E$ mikäli $x - y \in M$. Alkion $x \in E$ määräämää ekvivalenssiluokkaa merkitään symbolilla $x + M$. Erityisesti siis $x + M = y + M$ jos ja vain jos $x - y \in M$.

(i) Tarkista, että tekijäavaruuden E/M laskutoimitukset $(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$ ja $\lambda(x+M) = \lambda x + M$ kun $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbf{K}$ ovat hyvin määriteltyjä, eli että ne eivät riipu edustajien x, y valinnoista.

(ii) Näytä, että kaava $\|x + M\| := \inf\{\|x - m\| : m \in M\}$ määrittelee normin tekijäavaruuteen E/M. Totea, että tälle normille pätee $\|x + M\| \leq \|x\|$ kaikilla $x \in E$.

(iii) Missa kohtaa kohdassa (ii) tarvittiin sitä tietoa, että aliavaruus M on suljettu?

8*[1] Osoita, että tehtävässä 7 määritelty normiavaruus $(E/M, \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus.

[1]Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.1: [Vihje: Kohdassa (i) käytä Hölderin epäyhtälöä sopivilla funktioilla ja eksponentilla.]

T.2: [Vihje: matki jonoavaruuksien Minkowskin epäyhtälön todistusta.]

T.4: [Muista Analyysi II:sta tuttu Leibnitzin lause vuorottevista sarjoista.]

T.8: [*Idea.* On osoitettava, että jokainen avaruuden E/M absoluuttisesti suppeneva sarja $\sum_n \|x_n + M\| < \infty$ todella suppenee tekijäavaruudessa E/M. Määritelmän nojalla jokaisella $n \in \mathbf{N}$ löytyy sellainen edustaja $y_n \in x_n + M$, että $\|y_n\| \leq 2\|x_n + M\|$. Tällöin sarja $\sum_n y_n$ suppenee E:ssä oletuksen nojalla. Näytä että $y + M = \sum_n (x_n + M)$, missä $y = \sum_n y_n$.]