FUNKTIONAALI-ANALYYSI. (kevät 2014)

2. HARJOITUKSET (pe 31.9, 12-14 salissa B322)

1. (i) Anna esimerkki jonosta joka suppenee avaruudessa ℓ^2, muttei suppene avaruudessa ℓ^1.

(ii) Anna esimerkki avaruuden ℓ_2 rajoitetusta jonosta, $x^{(n)}$ (siis $\|x^{(n)}\|_2 \leq C$ kaikilla $n \geq 1$), jolla ei ole laisinkaan suppenevia osajonoja.

2. Olkoon $1 \leq p \leq \infty$ ja olkoon $d = (d_n)_{n=1}^\infty$ kiinteä rajoitettu jono skalaareja. Tarkastellaan diagonaalioperaattoria

$$\Lambda_d : \ell^p \to \ell^p,$$

missä siis

$$\Lambda_d(d_n)_{n=1}^\infty := (\lambda_n x_n)_{n=1}^\infty.$$

Luennoilla näytettiin, että Λ_d on rajoitettu lineaarioperaattori $\ell^p \to \ell^p$ kun $1 < p < \infty$. Päteekö tämä myös kun $p = 1$ tai $p = \infty$? Onko λ_d rajoitettu operaattori missään näissä avaruuksissa jos jono d ei olekaan rajoitettu? Laske kuvauksen Λ_d normi $\|\Lambda_d\|_{\ell^p \to \ell^p}$.

3. Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ kun $x = (x_n) \in \ell^p$. Päättele, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$ kun $1 \leq p < q < \infty$.

4. Jos $f \in C(0,1)$, asetetaan

$$Tf(x) = f(1) + \int_0^1 x^2\, f(t^3)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

Osoita tarkasti, että T on hyvin määritelty ja jatkuva (eli rajoitettu) lineaarinen kuvaus $T : C(0,1) \to C(0,1)$. Bonustehtävä: Määrää T:n normi $\|T\|$.

5. Varustetaan avaruus $C(0,1)$ normilla

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

(osoitamme myöhemmin luennoilla, että kyseessä on todellakin normi). Osoita tarkasti , että normiavaruus $(C(0,1), \|\cdot\|_2)$ ei ole täydellinen.

6*[1] Olkoon $x = (x)_{n=1}^\infty$ skalaarijono, jolle $\|x\|_1 < \infty$. Osoita, että tällöin logaritmi ℓ^p-normista, $\log(\|x\|_p)$, on konveksi funktio parametrin $1/p$ funktiona.

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.2: [Tutki aluksi sellaista jonoa $x = (x_n) \in \ell^p$ jolle $\|x\|_p = 1$.]

T.5: [Voit esimerkiksi täydentää yksityiskohdat luennoilla mainittuun esimerkkiin ei-suppenevasta Cauchy-jonosta (f_n), missä $f_n(x) = 1$ kun $0 \le x \le 1/2$, $f_n(x) = 1 - 2n(x - 1/2)$ kun $1/2 \le x \le 1/2 + 1/2n$ ja $f_n(x) = 0$ kun $1/2 + 1/2n \le x \le 1/2$.]

T.6: [Hölderin epäyhtälö.]