FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

1. HARJOITUKSET (pe 24.9, 12-14 salissa B322)

1. Olkoon $A \subset E$ normiavaruuden E osajoukko. Osoita, määritelmistä lähtien, että A on tiheä avaruudessa E jos ja vain jos $A \cap B \neq \emptyset$ jokaisella avaruuden E avoimella pallolla $B = B(x, r)$ (tässä siis $x \in E$ ja $r > 0$ ovat mielivaltaisia).

2. Osoita, että c_0 on avaruuden c, ja puolestaan c avaruuden ℓ^∞ aliavaruus. Onko c_0 tiheässä avaruudessa c ? Onko c tiheässä avaruudessa ℓ^∞ ?

3. Määritellään 'jatkuvien funktioiden avaruus $C(0,1)$[1] välillä $[0,1]$ asettamalla

$$C(0,1) := \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \mid f \text{ on jatkuva}\},$$

ja varustamalla se normilla $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Osoita, että $C(0,1)$ on normiavaruus näyttämällä että se on avaruuden $B([0,1], \mathbb{K})$ aliavaruus.

4. Määritellään edellisen tehtävän avaruudessa uusi normi $\|\cdot\|^*$ asettamalla

$$\|\cdot\|^* := \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Näytä, että myös tällöin $(C(0,1), \|\cdot\|^*)$ on normiavaruus. Ovatko avaruuden $C(0,1)$ normit $\|\cdot\|_\infty$ ja $\|\cdot\|^*$ ekvivalentteja?

5. Osoita, että normiavaruus c_0 on separoituva.

6^{*2} Osoita että jokainen äärellisulotteisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ normi on ekvivalentti standardin Euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ kanssa.

---

[1] Joskus merkitään myös $C([0,1])$.

[2] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.4: [Tarkastele jonoa $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruuden $C(0,1)$ alkioita, missä $f_n(t) := t^n$, kun $t \in [0,1]$.]

T.5: [Totea ensin, että ns. finiittiset jonot $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, joille $x_n \neq 0$ vain äärellisen monella n, ovat tiheässä avaruudessa c_0.]