FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI. (kevät 2014)

11. HARJOITUKSET (pe 2.5, 12-14 salissa B322)

1. Olkoon H kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus ja $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Näytä, että

(i) $(ST)^* = T^* S^*$.

(ii) Jos S on kääntyvä ja itseadjungoitu , niin myös S^{-1} on itseadjungoitu.

(iii) Jos S on itseadjungoitu, niin myös $T^* S T$ on itseadjungoitu.

2. Olkoon $S \in \mathcal{L}(H)$, missä H on kompleksinen Hilbert-avaruus. Todista, että $\lambda \in \sigma(S)$ jos ja vain jos $\overline{\lambda} \in \sigma(S^*)$. Päättele tästä että itseadjungoidulle operattorille S pätee aina $\sigma(S) \subset \mathbb{R}$. Tee tämä seuraavissa vaiheissa:

(i) Osoita, että jos $(S - \lambda)x = 0$ jollain $x \in H$, niin $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Valitse mielivaltainen $\lambda \in \sigma(S)$. Päättele, että operaattori $S - \lambda$ ei voi olla sekä injektio että surjektio. Käytä kohtaa (i) tapaukseen, missä $S - \lambda$ ei ole injektio.

(iii) Oleta, että $S - \lambda$ ei ole surjektio. Osoita, että kuvaus $S - \bar{\lambda}$ ei tällöin ole injektio. Käytä tähän seuraavaa aputulosta:

(iv) Jos $T : H \to H$ on lineaarinen operaattori, niin $(\mathrm{Im}\, T)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, T^*$.

(v) Johda lopputulos kohdasta (iii).

Muistutus: Operaattorin S spektri $\sigma(S)$ koostuu niistä reaaliluvuista λ, joille operaattori $S - \lambda$ ei ole bijektio. Tässä $(S - \lambda)x = Sx - \lambda x$.

3. Olkoon H kompleksinen Hilbert-avaruus. Operaattori $T \in \mathcal{L}(H)$ on *positiivinen* mikäli $(Tx|x) \geq 0$ kaikilla $x \in H$.

(i) Näytä, että kahden positiivisen operaattorin summa on positiivinen.

(ii) Onko kahden positiivisen operaattorin S, T yhdiste ST aina positiivinen?

(iii) Osoita, että T^2 on positiivinen mikäli T on itseadjungoitu. Onko tulos voimassa myös operaattorille T^3 ?

4. **(i)** Olkoot $a, b \in \mathbb{C}$ kompleksilukuja joille

$$\lambda a + \overline{\lambda}\, \overline{b} \in \mathbb{R} \qquad \text{kaikilla} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Näytä, että silloin $a = b$.

(ii) Näytä että jokainen positiivinen operaattori (kompleksisella Hilbert-avaruudella) on itseadjungoitu.

5. Olkoon $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ yksinkertaisin Volterra operaattori, eli

$$Tf(x) := \int_0^x f(x).$$

(i) Näytä, että $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ on kompakti operaattori.

(ii) Osoita, että $\|T^n\| \to 0$ as $n \to \infty$.

6*[1] Osoita, että edellisen tehtävän Volterra-operaattorille pätee $\sigma(T) = \{0\}$ (tämä osoittaa, että ei-itseadjungoidut – jopa kompaktit – operaattorit käyttäytyvät aivan eri tavoin kuin itse-adjungoidut).

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.4: [(ii): Nyt $(T(\lambda x + y)|\lambda x + y) \geq 0$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{C}$. Sovella sopivasti (i)-kohtaa.]

T.5: [(i) Pyri soveltamaan samaa todistusta kuin jatkuvalle ytimelle tehtiin luennoilla.]