FUNKTIONAALI-ANALYYSI. (kevät 2014)

10. HARJOITUKSET (ti 15.4, 10-12 salissa C124) Huom aika ja paikka!

1. Olkoon E äärellisulotteinen normiavaruus. Näytä, että jokainen lineaarinen funktionaali $f : E \to \mathbb{K}$ on jatkuva, toisin sanoen, $E^* = E^\dagger$.

.

2. Näytä, että on olemassa jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi : L^\infty(0,1) \to \mathbf{R}$ jolle $\phi(f) = f(\frac{1}{2})$ kaikilla jatkuvilla funktioilla $f : [0,1] \to \mathbf{R}$.

3. Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinnitetty jatkuva funktio $[0,1] \to \mathbb{R}$. Tutki Arzela-Ascolin lauseen avulla onko joukko $\{g_s : 0 \leq s \leq 1\}$ relatiivisesti kompakti avaruudessa $C(0,1)$, kun

$$g_s(t) = g((s+t)/2), \quad t \in [0,1] \text{ ja } s \in [0,1].$$

4. Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ jono. Sanotaan, että (x_n) suppenee *heikosti* avaruudessa E kohti vektoria $x \in E$, jos $x^*(x) = \lim_n x^*(x_n)$ kaikilla $x^* \in E^*$. (Merkintä: $x_n \xrightarrow{w} x$ kun $n \to \infty$).

Tutki, suppeneeko jono (e_n) heikosti avaruudessa X kun kun $e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ (ykkönen n:ssä paikassa), ja

(i) $X = c_0$.

(ii) $X = \ell^1$.

(iii) $X = \ell^p$, $< p < \infty$.

5. Olkoot E ja F Banach-avaruuksia. Operaattori $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on äärellisulotteinen mikäli jollakin $m \geq 1$ on olemassa vektorit $x_1,\ldots,x_m$ sekä $y_1^*,\ldots,y_m^*$ joille pätee

$$Tx = \sum_{k=1}^{m} y_k^*(x)x_k.$$

(i) Osoita että jokainen äärellisulotteinen operaattori on kompakti.

(ii) Osoita että $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on äärellisulotteinen jos ja vain jos kuva-avaruus $T(E)$ on äärelliulotteinen (avaruuden F aliavaruus).

6*[1] Olkoon Banach-avaruuden E duaaliavaruus E^* separoituva. Osoita, että E on separoituva. Päteekö käänteinen tulos ?

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.1: [Tarkastele kantavektorien kuvia.]

T.2: [Huomaa, että $C(0,1) \subset L^\infty(0,1)$ on suljettu aliavaruus (helppo) ja sovella Hahn-Banachia.]

T.3: [Funktion g tasaisesta jatkuvuudesta on hyötyä.]

T.6: [Olkoon (x_n^*) tiheä jono avaruudessa E ja valitse alkiot $x_n \in E$, joille $\|x_n\| = 1$ ja $x_n^*(x_n) \geq (1/2)\|x_n^*\|$ kaikilla n. Osoita sopivan Hahn-Banachin version avulla, että suljettu lineaarinen verho $\overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbf{N}\} = E$.]