Differentialekvationer II
Räkneövning 6
24.4. 2014 (kl 16-18 CK111)

1. Visa att matrisen

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$

är inverterbar för varje $t \in \mathbf{R}$, och bestäm den inversa matrisen $X(t)^{-1}$.

2. Lös DE-systemet

$$\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tips: matrisen A har ett dubbelt egenvärde $r = 3$. Bestäm en andra lösningsfunktion $\overline{x}^2(t) = e^{3t}(\overline{v} + t(A - 3I)\overline{v})$ mot egenvärdet $r = 3$ till fundamentalsystemet av lösningar, där $\overline{v} \in \mathbf{R}^2$, $\overline{v} \neq \overline{0}$, satisfierar $(A - 3I)^2\overline{v} = \overline{0}$.

3. Lös DE-systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= 5y_1(t) - 3x_2(t) \end{aligned}$$

med hjälp av elimineringsmetoden.

4. Lös det icke-homogena DE-systemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \overline{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

med elimineringsmetoden.

5. Lös det icke-homogena linjära DE-systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + e^{-t} \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + e^{t} \end{aligned}$$

genom formeln för variation av konstanterna. *Tips:* motsvarande homogena DE-system löstes i uppgift 5:1 och inversen $X(t)^{-1}$ till en fundamentalmatris $X(t)$ beräknades i uppgift 6:1.

6. Lös det icke-homogena linjära DE-systemet

$$x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + \sin t$$
$$x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cos t$$

med försöket $t \mapsto (\sin t)\overline{a} + (\cos t)\overline{b}$, där $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{R}^2$ är okända vektorer.

Kursprovet: måndag 28.4. kl 13-15 i Exaktum (samtidigt kursprov i kursen *Geometri*). *Till kursprovet får ni medta en minneslapp på en (= 1) A4-sida.*

Provområde: non-linjära DEr av andra ordningen*, linjära DEr av högre ordning med konstanta koefficienter*, lokala existens- och entydighetssatsen för första ordningens DEr, linjära DE-system av första ordningen, lösning av linjära DE-system med konstanta koefficienter. *Obs: för ämnen med * se också kursmappen DE 2011 i rum C326.*