Differentialekvationer II
Räkneövning 4
3.4. 2014 (kl 16-18 CK111)

1. Beräkna derivatan $\overline{x}'(t)$, då vektorfunktionerna $\overline{x}(t)$ definieras av

$$(i)\ \overline{x}(t) = (e^{-2t}, te^{t})^T, \quad (ii)\ \overline{x}(t) = (1, e^t \cos t, e^t \sin t)^T.$$

2. Verifiera att $(\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t))$, där $\overline{x}^1(t) = e^{7t}(2,1)^T$ och $\overline{x}^2(t) = e^{-5t}(-2,1)^T$, bildar ett fundamentalssystem av lösningar till det homogena systemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \overline{x}(t).$$

3. Verifiera att $(\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t), \overline{x}^3(t))$ är ett fundamentalssystem av lösningar till

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overline{x}(t),$$

då $\overline{x}^1(t) = e^t(1,0,-1)^T$, $\overline{x}^2(t) = e^{2t}(1,-1,-1)^T$ och $\overline{x}^3(t) = e^{-t}(1,2,-7)^T$.

4. Låt $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbf{R}^n$ vara en given vektor med $\overline{u} \neq \overline{0}$. Undersök om vektorfunktionerna

$$(i)\ \overline{x}(t) = t\overline{u},\ t \in \mathbf{R}, \qquad (ii)\ \overline{x}(t) = \log(t)\overline{u},\ t \in (0, \infty),$$

kan utgöra lösningar till ett system $\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t)$ av differentialekvationer för någon $n \times n$-matris $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ med konstanta koefficienter.

5. Låt $\alpha > 0$, $\beta > 0$ vara konstanter. Systemet

$$x_1'(t) = -\alpha x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -\beta x_1(t)$$

beskriver antalet bakterier $x_1(t)$ och $x_2(t)$ vid tiden $t \geq 0$ i en population där bakteriearterna förtär varandra utan att förökas. Bestäm $\frac{x_1(0)}{x_2(0)}$ då man vet att $x_1(t) > 0$ och $x_2(t) > 0$ för varje $t \geq 0$.

6. Låt $\overline{x}(t)$ vara en lösning till det homogena linjära systemet

$$\overline{x}'(t) = A(t)\overline{x}(t)$$

på det öppna intervallet $I \subset \mathbf{R}$, där $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Visa: om $\overline{x}(t_0) \neq \overline{0}$ för något $t_0 \in I$, så är $\overline{x}(t) \neq \overline{0}$ för alla $t \in I$. *Tips:* använd entydighetssatsen för linjära system.