Differentialekvationer II
Räkneövning 3
27.3. 2014 (kl 16-18 CK111)

1. Vi betraktar Picards iterationer från beviset av lokala existenssatsen,

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

för initialvärdesproblemet

$$y' = y + 2, \quad y(0) = 1.$$

Beräkna funktionerna $y_1$, $y_2$ och $y_3$.

2. Reducera den linjära differentialekvationen

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = \sin x$$

till ett 1. ordningens system i matrisformen med 4 obekanta funktioner.

3. Skriv om systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) + e^t \\ y'(t) &= -2x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) &= y(t) + 2z(t) - e^{-t} \end{aligned}$$

i matrisformen.

4. Punkterna $(x_0, y_0)$ utgör en *jämviktslösning* till systemet

$$\begin{aligned} x'(t) =& f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) =& f_2(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

om de konstanta funktioner $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ är lösningar, dvs. $f_1(x_0, y_0) = 0 = f_2(x_0, y_0)$. Visa att $(0, 0)$ utgör den enda jämviktslösningen till det linjära systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

om $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

5. Verifiera att $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$, där $t \in \mathbf{R}$, löser systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t). \end{aligned}$$

Vad händer med $(x(t), y(t))$ då $t \to \infty$?

6. Lös det linjära systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) \end{aligned}$$

med elimineringsmetoden (jämför Exempel 5.2, sidorna 59-60 i kompendiet).