Differentialekvationer II
Räkneövning 2
20.3. 2014 (16-18 CK111)

1. Sök alla lösningar $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$$

med hjälp av försöket $y(x) = e^{rx}$.

2. Sök alla lösningar $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y^{(4)} - y = 0$$

med hjälp av försöket $y(x) = e^{rx}$.

3. Sök en lösning $y_0 = y_0(x)$ som satisfierar den non-homogena differentialekvationen

$$y^{(4)} - y = e^x + e^{-2x}$$

genom försöket $y_0(x) = Axe^x + Be^{-2x}$, där A, B är obestämda konstanter. Vad kan du på basen av uppgift 2:2 säga om den allmänna lösningen till differentialekvationen?

4. Undersök om f satisfierar villkoret $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$ i lokala existens-och entydighetssatsen i området $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$, då

$$(i)\ f(x, y) = \sin(y) + \cos(x), \qquad (ii)\ f(x, y) = y^{1/3}.$$

5. Verifiera att funktionen $f(x, y) = e^x \ln(1+y^2)$ satisfierar villkorena i lokala existens-och entydighetssatsen i området $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 2, y \in \mathbf{R}\}$. Tips: medelvärdessatsen och partiella derivatan $D_2 f(x, y)$ i D.

6. Anta att $a, b \in \mathbb{R}$ och $r \in \mathbb{R}$ är en dubbelrot till ekvationen

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Verifiera att $x_n = r^n(C_1 + C_2 n), n \in \mathbb{N}$, löser differensekvationen

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

för alla konstanter $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. (Obs. dubbelroten $r = -a/2$.)