

Differentialekvationer II

Räkneövning 1

13.3. 2014 (kl 16-18 CK 111)

Under vecka 11 räknar jag igenom några exempel om icke-linjära 2. ordningens differentialekvationer, homogena linjära differentialekvationer av högre ordning med konstanta koefficienter, samt linjära differensekvationer, som **inte** finns i kompendiet. Kopior av anteckningarna finns i rum C326.

1. Lös initialvärdesproblemet

$$y' = \frac{1}{x + y^2}, \quad y(-2) = 0.$$

Tips: skriv differentialekvationen som $-1 + (x + y^2)y' = 0$ och notera att multiplikation med e^{-y} ger en exakt ekvation.

2. Sök en linjär differentialekvation av formen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

för vilken paret $\{e^x, F(x)e^x\}$ utgör ett fundamentalsystem av lösningar på \mathbf{R} , där $F(x) = \int_0^x e^{s^2/2} ds$. (Obs. F är integralfunktionen till $s \mapsto e^{s^2/2}$, dvs. $F'(x) = e^{x^2/2}$ för varje $x \in \mathbf{R}$, men $F(x)$ kan inte integreras explicit.)

3. Lös differentialekvationen

$$y'' = (y')^2$$

med substitutionen $y'(x) = z(x)$.

4. Lös initialvärdesproblemet

$$y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

genom att först lösa $z = z(t)$ från $z' = \frac{f(t,z)}{z}$, där $f(y, y') = e^{2y}$, och därefter $y = y(x)$ från $y'(x) = z(y(x))$.

5. Bilda motsvarigheten till Binets formel för de sk. Lucas talen y_n , $n \in \mathbf{N}$, som satisfierar differensekvationen

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad y_0 = 2, y_1 = 1.$$

Tips: samma försök $y_n = r^n$, $n \in \mathbf{N}$, där $r \in \mathbf{R}$, som för Fibonacci talen.

6. Anta att $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är godtyckliga två gånger deriverbara funktioner i \mathbf{R} . Verifiera att funktionen $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, där $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$, löser vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad c > 0 \text{ konstant.}$$

(Konklusion: lösningar av partiella differentialekvationer är helt olika ordinära DEr.)

Extrapoäng för lösta räkneövningsuppgifter som för *Differentialekvationer I*: för varje räkneövning 2–3 lösta uppgifter = +1/2 p., 4–6 lösta uppgifter = +1 p. Extrapoängen (max + 6 p) adderas till poängtalet i kursprovet (4 uppgifter och 2 timmar tid).