Differentialekvationer II
Räkneövning 6, modellsvar
24.4. 2014 (kl 16-18 CK111)

1. Visa att matrisen

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$

är inverterbar för varje $t \in \mathbf{R}$, och bestäm den inversa matrisen $X(t)^{-1}$.

Lösning: Vi börjar med att visa att den givna matrisen är inverterbar. Detta gör vi genom att undersöka dess determinant. Från linjäralgebra vet vi att om determinanten för en matris är olika 0, så är matrisen inverterbar.

$$\det(X(t)) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{vmatrix} = 1 \cdot e^{2t} - e^{2t} \cdot (-1) = 2e^{2t} > 0\, \forall t \in \mathbb{R}$$

Alltså är matrisen inverterbar för alla $t \in \mathbb{R}$.

Nu är det dags att bestämma inversen. Eftersom det är fråga om en 2×2-matris, så kan vi använda följande minnesregel för att hitta inversen:

$$\text{Om } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ är en inverterbar matris så är inversen } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Vi får alltså

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{\det(X(t))} \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -(-1) & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2e^{2t}} \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ett annat sätt att bestämma inversen är att studera den sammansatta matrisen av uppgiftens matris och identitetsmatrisen, och radreducera den första. Denna teknik borde vara bekant från linjäralgebra, och kan även användas för matriser med högre dimension än 2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & e^{2t} & 1 & 0 \\ -1 & e^{2t} & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & e^{2t} & 1 & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & e^{2t} & 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & e^{2t} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t} \end{array}\right]$$

Från dessa beräkningar får vi alltså att inversen är

$$X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

2. Lös DE-systemet

$$\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tips: matrisen A har ett dubbelt egenvärde $r = 3$. Bestäm en andra lösningsfunktion $\overline{x}^2(t) = e^{3t}(\overline{v} + t(A - 3I)\overline{v})$ mot egenvärdet $r = 3$ till fundamentalsystemet av lösningar, där $\overline{v} \in \mathbf{R}^2$, $\overline{v} \neq \overline{0}$, satisfierar $(A - 3I)^2\overline{v} = \overline{0}$.

Lösning:

$\underline{\lambda = 3:}$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & -1 \\ 1 & 4-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff u_1 + u_2 = 0 \iff u_1 = -u_2$$

Vi får alltså

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Genom att välja $u_2 = 1$ får vi egenvektorn $(-1, 1)^T$ och den första lösningen för systemet är då

$$\overline{x}^1(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

För att bilda ett fundamentalsystem måste vi hitta en till lösning till systemet som är linjärt oberoende från den första vi hittade. Vi följer tipset och börjar med att söka en vektor $\overline{v}$ som satisfierar $(A - 3I)^2\overline{v} = \overline{0}$. Vi märker att

$$(A - 3I) = \begin{bmatrix} 2-3 & -1 \\ 1 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$(A - 3I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) - 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alltså ska vi hitta en vektor $\overline{v} \neq \overline{0}$ som satisfierar

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Vi märker alltså att vi kan välja $\overline{v}$ hur som helst, så länge den är olika $\overline{u}$ och inte en nollvektor. Vi väljer nu

$$\overline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enligt uppgiftens tips blir nu andra lösningen till systemet

$$\overline{x}^2(t) = e^{3t}(\overline{v} + t(A - 3I)\overline{v}) = e^{3t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = e^{3t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$
$$= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ 1 + 2t \end{bmatrix}$$

Det följer från satserna i kompendiet att denna lösning är linjärt oberoende med den första lösningen, men detta kan även verifieras genom att räkna Wronskis determinant för lösningarna. Vi kan alltså bilda ett fundamentalsystem för systemet och den allmänna lösningen är således

$$\overline{x}(t) = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1-2t \\ 1+2t \end{bmatrix}$$

3. Lös DE-systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= 5x_1(t) - 3x_2(t) \end{aligned}$$

med hjälp av elimineringsmetoden.

Lösning: Vi börjar med att derivera första ekvationen i systemet, alltså

$$x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \implies x_1''(t) = x_1'(t) - x_2'(t)$$

I ekvationen ovan substituerar vi in den andra ekvationen, dvs. $x_2'(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t)$:

$$x_1''(t) = x_1'(t) - x_2'(t) = x_1'(t) - (5x_1(t) - 3x_2(t)) = x_1'(t) - 5x_1(t) + 3x_2(t)$$

Från första ekvationen i systemet får vi $x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \iff x_2(t) = x_1(t) - x_1'(t)$.
Vi substituerar in detta i ekvationen ovan:

$$\begin{aligned} & x_1''(t) = x_1'(t) - 5x_1(t) + 3x_2(t) = x_1'(t) - 5x_1(t) + 3(x_1(t) - x_1'(t)) = -2x_1'(t) - 2x_1(t) \\ & \iff x_1''(t) + 2x_1'(t) + 2x_1(t) = 0 \end{aligned}$$

Denna ekvation kan vi lösa med hjälp av karakteristiska polynom, dvs. vi löser

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \iff r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = -1 \pm i$$

Fundamentalsystemet av lösningar är således $\{e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t\}$ och den allmänna lösningen är

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t = e^{-t}(C_1\cos t + C_2 \sin t)$$

Nu kan vi bestämma $x_2(t)$ från ekvationen $x_2(t) = x_1(t) - x_1'(t)$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) - (-e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-t}(-C_1\sin t + C_2\cos t)) \\ &= 2e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) - e^{-t}(-C_1\sin t + C_2\cos t) = e^{-t}((2C_1 - C_2)\cos t + (2C_2 + C_1)\sin t) \end{aligned}$$

Lösningen för uppgiften är alltså

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) \\ x_2(t) = e^{-t}((2C_1 - C_2)\cos t + (2C_2 + C_1)\sin t) \end{cases}$$

4. Lös det icke-homogena DE-systemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \overline{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

med elimineringsmetoden.

Lösning: Vi börjar med att skriva om matrissystemet som skilda ekvationer, dvs.

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) + e^{-t} \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) - e^{-t} \end{cases}$$

Vi löser detta ekvationssystem genom elimineringsmetoden. Först deriverar vi första ekvationen, alltså

$$x_1'(t) = 2x_2(t) + e^{-t} \implies x_1''(t) = 2x_2'(t) - e^{-t}$$

Nu substituerar vi in den andra ekvationen i systemet i ekvationen ovan:

$$x_1''(t) = 2x_2'(t) - e^{-t} = 2(-x_1(t) + 3x_2(t) - e^{-t}) - e^{-t} = -2x_1(t) + 6x_2(t) - 3e^{-t}$$

Från första ekvationen i systemet får vi att $x_1'(t) = 2x_2(t) + e^{-t} \iff x_2(t) = \frac{1}{2}(x_1'(t) - e^{-t})$. Vi substituerar in detta i ekvationen ovan

$$x_1''(t) = -2x_1(t) + 6x_2(t) - 3e^{-t} = -2x_1(t) + \frac{6}{2}(x_1'(t) - e^{-t}) - 3e^{-t} = -2x_1(t) + 3x_1'(t) - 6e^{-t}$$
$$\iff x_1''(t) - 3x_1'(t) + 2x_1(t) = -6e^{-t}$$

För att lösa denna icke-homogena ekvation, räcker det att lösa den homogena ekvationen samt att hitta en specifik lösning för den icke-homogena ekvationen. Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $x_1''(t) - 3x_1'(t) + 2x_1(t) = 0$ genom karakteristiska polynom. Vi får

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \iff (r-1)(r-2) = 0 \iff r = 1 \text{ eller } r = 2$$

Fundamentalsystemet av lösningar är alltså $\{e^t, e^{2t}\}$ och den allmänna lösningen för den homogena ekvationen är

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

Nu försöker vi hitta en specifik lösning för den icke-homogena ekvationen. Eftersom högra sidan av ekvationen är $-6e^{-t}$ så är det naturligt att använda försöket $x_1(t) = ae^{-t}$ och försöka bestämma ett värde för $a \in \mathbb{R}$. Vi får nu

$$x_1''(t) - 3x_1'(t) + 2x_1(t) = -6e^{-t} \iff ae^{-t} - 3 \cdot (-ae^{-t}) + 2ae^{-t} = -6e^{-t}$$
$$\iff a - 3 \cdot (-a) + 2a = -6 \iff 6a = -6 \iff a = -1$$

Alltså är $x_1(t) = -e^{-t}$ en specifik lösning för den icke-homogena ekvationen. Den allmänna lösningen för den icke-homogena ekvationen är således

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - e^{-t}$$

Eftersom $x_2(t) = \frac{1}{2}(x_1'(t) - e^{-t})$ och $x_1'(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + e^{-t}$ så får vi

$$x_2(t) = \frac{1}{2}(C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + e^{-t} - e^{-t}) = \frac{C_1}{2} e^t + C_2 e^{2t}$$

Alltså är lösningen för ekvationssystemet

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{2t} - e^{-t} \\ \frac{C_1}{2} e^t + C_2 e^{2t} \end{bmatrix}, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

5. Lös det icke-homogena linjära DE-systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + e^{-t} \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + e^t \end{aligned}$$

genom formeln för variation av konstanterna. *Tips:* motsvarande homogena DE-system löstes i uppgift 5:1 och inversen $X(t)^{-1}$ till en fundamentalmatris $X(t)$ beräknades i uppgift 6:1.

Lösning: Vi börjar med att skriva systemet i matrisform:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix}$$

Som tipset nämner, har vi i uppgift 5:1 löst motsvarande homogena ekvation. Dess lösningar har alla formen

$$\overline{x}^h(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eftersom fundamentalsystemet $\{(-1,1)^T, e^{2t}(1,1)^T\}$ ger samma lösningar som systemet $\{(1,-1)^T, e^{2t}(1,1)^T\}$, så väljer vi som vår fundamentalmatris

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

som vi i uppgift 6:1 konstaterade att var inverterbar, samt att den hade inversen

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Precis som med de icke-homogena ekvationer vi löst tidigare så måste vi nu hitta en specifik lösning $\overline{x}^1(t)$ för systemet. Denna specifika lösning är av formen

$$\overline{x}^1(t) = X(t)c(t)$$

där

$$\begin{aligned} c(t) &= \int X^{-1}(t) \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix} dt = \int \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix} dt = \frac{1}{2} \int \begin{bmatrix} e^{-t} - e^t \\ e^{-3t} + e^{-t} \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-t} - e^t \\ -\frac{1}{3} e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3e^{-t} - 3e^t \\ -e^{-3t} - 3e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi kan nu beräkna den specifika lösningen:

$$\overline{x}^1(t) = X(t)c(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3e^{-t} - 3e^{t} \\ -e^{-3t} - 3e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3e^{-t} - 3e^{t} + e^{2t} \cdot (-e^{-3t} - 3e^{-t}) \\ -(3e^{-t} - 3e^{t}) + e^{2t} \cdot (-e^{-3t} - 3e^{-t}) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3e^{-t} - 3e^{t} - e^{-t} - 3e^{t} \\ -3e^{-t} + 3e^{t} - e^{-t} - 3e^{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -4e^{-t} - 6e^{t} \\ -4e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2e^{-t} - 3e^{t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

Den allmänna lösningen för uppgiftens system är således

$$\overline{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2e^{-t} - 3e^{t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

6. Lös det icke-homogena linjära DE-systemet

$$x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + \sin t$$
$$x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cos t$$

med försöket $t \mapsto (\sin t)\overline{a} + (\cos t)\overline{b}$, där $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{R}^2$ är okända vektorer.

Lösning: Vi börjar med att skriva vårt system i matrisform:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \tag{1}$$

Den homogena ekvationen är samma som i förra uppgiften, och vi vet att dess lösning är

$$\overline{x}^h(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Precis som tidigare, räcker det nu att hitta en specifik lösning $\overline{x}^1(t)$ för den icke-homogena ekvationen. Vi följer uppgiftens tips och använder oss av försöket

$$\overline{x}^1(t) = (\sin t) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + (\cos t) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \sin t + b_1 \cos t \\ a_2 \sin t + b_2 \cos t \end{bmatrix}$$

Vi märker att

$$\frac{d}{dt} \overline{x}^1(t) = \begin{bmatrix} a_1 \cos t - b_1 \sin t \\ a_2 \cos t - b_2 \sin t \end{bmatrix}$$

Insättning av dessa värden i matrisekvationen (1) ger nu

$$\begin{bmatrix} a_1 \cos t - b_1 \sin t \\ a_2 \cos t - b_2 \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \sin t + b_1 \cos t \\ a_2 \sin t + b_2 \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 \sin t + b_1 \cos t + a_2 \sin t + b_2 \cos t + \sin t \\ a_1 \sin t + b_1 \cos t + a_2 \sin t + b_2 \cos t + \cos t \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2 + 1) \sin t + (b_1 + b_2) \cos t \\ (a_1 + a_2) \sin t + (b_1 + b_2 + 1) \cos t \end{bmatrix}$$

Eftersom detta ska gälla för alla t så måste koefficienterna för sin och cos på vardera rad vara lika med varandra. Vi får alltså följande ekvationssystem

$$\begin{cases} a_1 & = b_1 + b_2 \\ a_2 & = b_1 + b_2 + 1 \\ -b_1 & = a_1 + a_2 + 1 \\ -b_2 & = a_1 + a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 - b_1 - b_2 = 0 \\ a_2 - b_1 - b_2 = 1 \\ a_1 + a_2 + b_1 = -1 \\ a_1 + a_2 + b_2 = 0 \end{cases}$$

Detta kan skrivas i matrisform som

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi löser detta ekvationssystem genom Gauss-Jordan eliminering (se Linjäralgebra och matrisräkning I-II). Alltså

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{3}{5} \\ a_2 = \frac{2}{5} \\ b_1 = -\frac{4}{5} \\ b_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Vi får alltså den specifika lösningen

$$\overline{x}^1(t) = (\sin t) \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} + (\cos t) \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t \right)$$

Den allmänna lösningen är således

$$\overline{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t \right)$$

Kursprovet: måndag 28.4. kl 13-15 i Exaktum (samtidigt kursprov i kursen *Geometri*). *Till kursprovet får ni medta en minneslapp på en (= 1) A4-sida.*

Provområde: non-linjära DEr av andra ordningen*, linjära DEr av högre ordning med konstanta koefficienter*, lokala existens- och entydighetssatsen för första ordningens DEr, linjära DE-system av första ordningen, lösning av linjära DE-system med konstanta koefficienter. *Obs: för ämnen med * se också kursmappen DE 2011 i rum C326.*