Differentialekvationer II
Räkneövning 5, modellsvar
10.4. 2014 (16-18 CK111)

1. Lös det linjära homogena DE-systemet

$$x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Lösning: Vi börjar med att skriva om den givna ekvationen i matrisform, dvs.

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{:=A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Vi söker nu egenvärden för matrisen A, dvs. de λ för vilka $\det(A - \lambda I) = 0$ gäller:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Nu när vi hittat egenvärdena så ska vi söka de motsvarande egenvektorerna, dvs. de vektorer $\overline{u}$ för vilka $(A - \lambda I)\overline{u} = \overline{0}$ gäller.

$\underline{\lambda = 0:}$

$$\begin{bmatrix} 1-0 & 1 \\ 1 & 1-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff u_1 + u_2 = 0 \iff u_1 = -u_2$$

Med hjälp av detta kan vi skriva

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det räcker att hitta en motsvarande vektor för varje egenvärde, så vi kan välja $u_2 = 1$ och får således egenvektorn

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 2:}$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} -u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff u_1 = u_2$$

Nu kan vi skriva

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Igen, genom att välja $u_2 = 1$ får vi egenvektorn

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nu, eftersom egenvärdena för matrisen var olika så kommer egenvektorerna att vara linjärt oberoende. Vi kan alltså forma ett fundamentalsystem av lösningar för ekvationssystemet, dvs. alla ekvationer kommer att ha formen

$$\overline{x}(t) = C_1 e^{0\cdot t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Märk att lösningen kan se olika ut, beroende på val av egenvektorer. I praktiken är det ändå samma lösning p.g.a. de okända konstanterna $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Sök ett fundamenalsystem av lösningar till det homogena DE-systemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overline{x}(t).$$

Tips: $\lambda = -1$ är en rot till det karakteristiska polynomet.

Lösning: Vi börjar med att bestämma egenvärdena för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena beräknas från $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi får

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-\lambda(3-\lambda) - 4) - 2(2(3-\lambda) - 8) + 4(4 + 4\lambda) \\ &= -9\lambda + 3\lambda^2 - 12 + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda - 12 + 4\lambda + 16 + 16 + 16\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) = -(\lambda+1)^2(\lambda - 8) = 0 \end{aligned}$$

Ovan använde vi tipset att en av rötterna är $\lambda = -1$. Vi får nu att egenvärdena är $\lambda = -1$ (vilket är en dubbelrot) och $\lambda = 8$. Fastän A bara har 2 egenvärden så följer från Lemma 5.14 att eftersom A är symmetrisk så har den fortfarande 3 linjärt oberoende egenvektorer. Vi bestämmer dessa från ekvationen $(A - \lambda I)\overline{u} = \overline{0}$ så att dubbelroten får två linjärt oberoende egenvektorer.

$\underline{\lambda = 8:}$

$$\begin{bmatrix} 3-8 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & 3-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Vi kan använda oss av Gauss eller Gauss-Jordan eliminering (se Linjäralgebra och matrisräkning I-II) för att få ekvationssystemet i ett format som är enklare att lösa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu kan vi lösa ekvationerna

$$\begin{cases} -u_1 + u_3 = 0 \\ -2u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \implies u_1 = u_3 = 2u_2$$

Vi får alltså

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_2 \\ u_2 \\ 2u_2 \end{bmatrix} = u_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Genom att välja $u_2 = 1$ får vi egenvektorn

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = -1:}$

$$\begin{bmatrix} 3-(-1) & 2 & 4 \\ 2 & -(-1) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Från systemet ovan får vi ekvationen $2u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \iff u_2 = -2u_1 - 2u_3$, dvs.

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ -2u_1 - 2u_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = u_1 \overline{u}^1 + u_3 \overline{u}^2$$

Genom att välja $u_1 = 1, u_3 = 0$ får vi således egenvektorn $\overline{u}^1$ och genom att välja $u_1 = 0, u_3 = 1$ får vi egenvektorn $\overline{u}^2$. Egenvektorerna som motsvarar egenvärdet $\lambda = -1$ är alltså

$$\overline{u}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{u}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Allmänna lösningen blir således

$$\overline{x}(t) = C_1 e^{8t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Sök alla lösningar till det homogena DE-systemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overline{x}(t).$$

Tips: karakteristiska polynomet är $p(\lambda) = -(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$.

Lösning: Vi börjar med att bestämma egenvärdena för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi använder oss av tipset och får således att

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff -(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2 = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 5 \\ \lambda = 2 \, \text{(dubbelrot)} \end{cases}$$

Igen, eftersom 3×3-matrisen A är symmetrisk så kommer den att ha 3 linjärt oberoende egenvektorer. Vi bestämmer dem genom att lösa ekvationen $(A - \lambda I)\overline{u} = \overline{0}$ så att dubbelroten får två linjärt oberoende egenvektorer.

$\underline{\lambda = 5 :}$

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 1 & 1 \\ 1 & 3-5 & 1 \\ 1 & 1 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Genom Gauss eller Gauss-Jordan eliminering kan vi förekla detta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu kan vi lösa ekvationerna

$$\begin{cases} -u_1 + u_3 = 0 \\ -u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \implies u_1 = u_3 = u_2$$

Vi får alltså

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Genom att välja $u_1 = 1$ får vi egenvektorn

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 2:}$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-2 & 1 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Vi får alltså ekvationen $u_1 + u_2 + u_3 = 0 \iff u_1 = -u_2 - u_3$, dvs.

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 - u_3 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = u_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_2 \overline{u}^1 + u_3 \overline{u}^2$$

Genom att välja $u_2 = 1, u_3 = 0$ får vi således egenvektorn $\overline{u}^1$ och genom att välja $u_2 = 0, u_3 = 1$ får vi egenvektorn $\overline{u}^2$. Egenvektorerna som motsvarar egenvärdet $\lambda = 2$ är alltså

$$\overline{u}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{u}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Allmänna lösningen blir således

$$\overline{x}(t) = C_1 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Sök alla lösningar till DE-systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t). \end{aligned}$$

Lösning: Vi skriver om ekvationssystemet som ett matrissystem

$$\overline{x}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{:=A} \overline{x}(t)$$

Vi beräknar egenvärdena:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = 0 \iff 2 - \lambda = \pm\sqrt{-1} \iff \lambda = 2 \pm i$$

Vi beräknar motsvarande egenvektor:

$\underline{\lambda = 2 + i:}$

$$\begin{bmatrix} 2-(2+i) & 1 \\ -1 & 2-(2+i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Vi löser alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} -u_1 i + u_2 = 0 \\ -u_1 - u_2 i = 0 \end{cases} \iff u_2 = u_1 i$$

Vi får

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 i \end{bmatrix} = u_1 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i \right)$$

Genom att välja $u_1 = 1$ får vi

$$\overline{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{:=\overline{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{:=\overline{b}} i$$

Från sats 5.15 följer nu, att om ena egenvärdet är $\lambda = \alpha + \beta i$ och dess motsvarande egenvektor $\overline{a} + \overline{b}i$, så är den allmänna lösningen för ekvationssystemet $C_1\overline{x}^1(t) + C_2\overline{x}^2(t)$, där

$$\overline{x}^1(t) = e^{\alpha t}(\overline{a}\cos(\beta t) - \overline{b}\sin(\beta t))$$
$$\overline{x}^2(t) = e^{\alpha t}(\overline{a}\sin(\beta t) + \overline{b}\cos(\beta t))$$

Den allmänna lösningen för uppgiftens ekvation är alltså

$$\overline{x}(t) = C_1 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) + C_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t \right)$$

5. Lös initialvärdesproblemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{x}(t), \quad \overline{x}(0) = (1,1,1)^T.$$

Lösning: Vi börjar bed att beräkna egenvärdena för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi får

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + (1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1) = 0$$

Vi har alltså egenvärdena

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 + i \\ \lambda = 1 - i \end{cases}$$

Vi beräknar nu egenvektorerna från ekvationen $(A-\lambda I)\overline{u} = \overline{0}$ för $\lambda = 1$ och för $\lambda = 1+i$.

$\underline{\lambda = 1}$:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Vi får alltså att $u_2 = u_3 = 0$ och $u_1 \in \mathbb{R}$. Om vi väljer $u_1 = 1$ får vi således egenvektorn

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 1+i}$:

$$\begin{bmatrix} 1-(1+i) & 0 & 0 \\ 0 & 1-(1+i) & -1 \\ 0 & 1 & 1-(1+i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Vi löser alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} -u_1 i = 0 \\ -u_2 i - u_3 = 0 \\ u_2 - u_3 i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = u_3 i \end{cases}$$

Genom att välja $u_3 = 1$ får vi nu egenvektorn

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} i$$

Såsom i förra uppgiften behöver vi inte beräkna egenvektorn för det andra komplexa värdet, och vi får till slut den allmänna lösningen

$$\overline{x}(t) = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^t \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) + C_3 e^t \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right)$$

Från initialvärdet kan vi bestämma värden på C_1, C_2, C_3:

$$\overline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \right) + C_3 \left(0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Alltså är $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ och vi får lösningen

$$\overline{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) + e^t \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$

6. Lös det icke-linjära DE systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t)x_2(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

genom att först lösa $x_1'(t) = x_1(t)$.

Lösning: Vi följer uppgiftens tips och löser först ekvationen $x_1'(t) = x_1(t)$. Vi märker att detta är en separerbar ekvation med triviallösningen $x_1(t) = 0$. Resten av lösningarna fås genom separering av variabler:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \iff \int \frac{dx_1}{x_1} = \int 1\, dt \iff \ln|x_1| = t + C_1' \iff x_1 = C_1 e^t \quad (C_1 = \pm e^{C_1'})$$

P.g.a. triviallösningen behöver inte $C_1 = 0$ förbjudas.

Nu substituerar vi in lösningen ovan i den andra ekvationen i systemet. Alltså får vi

$$x_2'(t) = x_1(t)x_2(t) - x_2(t) = x_2(t)(x_1(t) - 1) = x_2(t)(C_1 e^t - 1)$$

Igen märker vi att detta är en separerbar ekvation med triviallösningen $x_2(t) = 0$. Resten av lösningarna fås genom separering av variabler

$$\begin{aligned} &\frac{dx_2}{dt} = x_2(C_1 e^t - 1) \iff \int \frac{dx_2}{x_2} = \int (C_1 e^t - 1)\, dt \iff \ln|x_2| = C_1 e^t - t + C_2' \\ &\iff x_2 = C_2 e^{C_1 e^t - t} \quad (C_2 = \pm e^{C_2'}) \end{aligned}$$

Igen, p.g.a. triviallösningen behöver vi inte förbjuda $C_2 = 0$. Allmänna lösningen är således

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{C_1 e^t - t} \end{bmatrix} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Kursprovet måndag 28.4 kl 13-15 (samtidigt kursprov i kursen *Geometri*). Alternativt provtillfälle arrangeras vid behov (tag kontakt). Genomgång av provområdet sista föreläsningen onsdag 16.4. Sista övningen (Övning 6) torsdag 24.4.