Differentialekvationer II
Räkneövning 4, modellsvar
3.4. 2014 (kl 16-18 CK111)

1. Beräkna derivatan $\overline{x}'(t)$, då vektorfunktionerna $\overline{x}(t)$ definieras av

$$(i)\ \overline{x}(t) = (e^{-2t}, te^t)^T, \quad (ii)\ \overline{x}(t) = (1, e^t \cos t, e^t \sin t)^T.$$

Lösning: När man deriverar en vektorfunktion, så deriverar man helt enkelt de enskilda komponenterna skilt för sig.

(i)

$$\overline{x}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}e^{-2t} \\ \frac{d}{dt}te^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ e^t + te^t \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\overline{x}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}1 \\ \frac{d}{dt}e^t \cos t \\ \frac{d}{dt}e^t \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{bmatrix}$$

2. Verifiera att $(\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t))$, där $\overline{x}^1(t) = e^{7t}(2,1)^T$ och $\overline{x}^2(t) = e^{-5t}(-2,1)^T$, bildar ett fundamentalssystem av lösningar till det homogena systemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \overline{x}(t).$$

Lösning: För att verifiera ett fundamentalsystem för en differentialekvation måste vi först verifiera att alla vektorer löser systemet skilt för sig samt att vektorerna är linjärt oberoende (Wronskis determinant är olika 0).

Först verifierar vi att vektorerna löser systemet skilt för sig. Vi märker att

$$\frac{d}{dt}\overline{x}^1(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14e^{7t} \\ 7e^{7t} \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\overline{x}^2(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10e^{-5t} \\ -5e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Vi får nu

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \overline{x}^1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{7t} + 12e^{7t} \\ 3 \cdot 2e^{7t} + e^{7t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14e^{7t} \\ 7e^{7t} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\overline{x}^1(t)$$

och

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \overline{x}^2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-5t} + 12e^{-5t} \\ 3 \cdot (-2e^{-5t}) + e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10e^{-5t} \\ -5e^{-5t} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\overline{x}^2(t)$$

Så både $\overline{x}^1(t)$ och $\overline{x}^2(t)$ är lösningar för ekvationen. Det som återstår är att beräkna deras Wronskis determinant:

$$w(\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t)) = \begin{vmatrix} 2e^{7t} & -2e^{-5t} \\ e^{7t} & e^{-5t} \end{vmatrix} = 2e^{7t}e^{-5t} - (-2e^{-5t}e^{7t}) = 2e^{2t} + 2e^{2t} = 4e^{2t} > 0\, \forall t$$

Eftersom $(\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t))$ uppfyller det givna systemet och är oberoende så bildar de alltså ett fundamentalsystem.

3. Verifiera att $(\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t), \overline{x}^3(t))$ är ett fundamentalssystem av lösningar till

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overline{x}(t),$$

då $\overline{x}^1(t) = e^t(1,0,-1)^T$, $\overline{x}^2(t) = e^{2t}(1,-1,-1)^T$ och $\overline{x}^3(t) = e^{-t}(1,2,-7)^T$.

Lösning: Vi går tillväga på samma sätt som i förra uppgiften. Först märker vi att

$$\frac{d}{dt}\overline{x}^1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\overline{x}^2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\overline{x}^3(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ 7e^{-t} \end{bmatrix}$$

Vi får nu:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overline{x}^1(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - 0 + 0 \\ e^t + 0 - e^t \\ -2e^t + 0 - (-e^t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\overline{x}^1(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overline{x}^2(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} - (-e^{2t}) + 0 \\ e^{2t} - 2e^{2t} - e^{2t} \\ -2e^{2t} - e^{2t} - (-e^{2t}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\overline{x}^2(t), \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overline{x}^3(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ -7e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{-t} + 0 \\ e^{-t} + 2 \cdot 2e^{-t} - 7e^{-t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-t} - (-7e^{-t}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ 7e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\overline{x}^3(t), \end{aligned}$$

Alltså är $\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t)$ och $\overline{x}^3(t)$ lösningar till uppgiftens ekvation. Vi beräknar nu deras

Wronskis determinant och konstaterar att den är olika 0:

$$
\begin{aligned}
W(\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t), \overline{x}^3(t)) &= \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-t} \\ 0 & -e^{2t} & 2e^{-t} \\ -e^t & -e^{2t} & -7e^{-t} \end{vmatrix} = e^t \begin{vmatrix} -e^{2t} & 2e^{-t} \\ -e^{2t} & -7e^{-t} \end{vmatrix} - 0 - e^t \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ -e^{2t} & 2e^{-t} \end{vmatrix} \\
&= e^t \cdot (-e^{2t} \cdot (-7e^{-t}) - 2e^{-t} \cdot (-e^{2t})) - e^t(e^{2t} \cdot 2e^{-t} - e^{-t} \cdot (-e^{2t})) \\
&= e^t(7e^t + 2e^t) - e^t(2e^t + e^t) = 9e^{2t} - 3e^{2t} = 6e^{2t} > 0\,\forall t
\end{aligned}
$$

Så eftersom $(\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t), \overline{x}^3(t))$ uppfyller det givna systemet och är oberoende så bildar de ett fundamentalsystem.

4. Låt $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbf{R}^n$ vara en given vektor med $\overline{u} \neq \overline{0}$. Undersök om vektorfunktionerna

$$(i)\ \overline{x}(t) = t\overline{u},\ t \in \mathbf{R}, \qquad (ii)\ \overline{x}(t) = \log(t)\overline{u},\ t \in (0, \infty),$$

kan utgöra lösningar till ett system $\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t)$ av differentialekvationer för någon $n \times n$-matris $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ med konstanta koefficienter.

Lösning: (i) Låt $\overline{u} \neq 0$ vara en given vektor och anta att $x(t)$ uppfyller ekvationen $\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t)$. Vi märker nu att

$$\overline{x}(t) = t\overline{u} \implies \overline{x}'(t) = \overline{u}$$

för alla $t \in \mathbb{R}$. Vi undersöker ekvationen i punkten $t = 0$ och märker att

$$\overline{x}'(0) = A\overline{x}(0) \iff \overline{u} = A \cdot \overline{0} = \overline{0},$$

vilket är en motsägelse. Alltså kan $x(t)$ inte vara en lösning för uppgiftens ekvation.

(ii) Låt igen $\overline{u} \neq 0$ vara en given vektor och anta att $x(t)$ uppfyller ekvationen $\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t)$. Vi märker nu att

$$\overline{x}(t) = \log(t)\overline{u} \implies \overline{x}'(t) = \frac{1}{t}\overline{u}$$

för alla $t \in (0, \infty)$. Vi undersöker ekvationen i punkten $t = 1$ och märker att

$$\overline{x}'(1) = A\overline{x}(1) \iff \overline{u} = A \cdot \overline{0} = \overline{0},$$

vilket är en motsägelse. Alltså kan $x(t)$ inte vara en lösning för uppgiftens ekvation.

5. Låt $\alpha > 0$, $\beta > 0$ vara konstanter. Systemet

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= -\alpha x_2(t) \\
x_2'(t) &= -\beta x_1(t)
\end{aligned}
$$

beskriver antalet bakterier $x_1(t)$ och $x_2(t)$ vid tiden $t \geq 0$ i en population där bakteriearterna förtär varandra utan att förökas. Bestäm $\frac{x_1(0)}{x_2(0)}$ då man vet att $x_1(t) > 0$ och $x_2(t) > 0$ för varje $t \geq 0$.

Lösning: Vi börjar med att lösa ekvationssystemet genom eliminering. Alltså, vi deriverar den första ekvationen och substituerar sedan in $x_2'(t) = -\beta x_1(t)$:

$$x_1''(t) = -\alpha x_2'(t) = \alpha\beta x_1(t) \iff x_1''(t) - \alpha\beta x_1(t) = 0$$

Denna ekvation kan vi nu enkelt lösa genom karakteristiska polynom:

$$x_1''(t) - \alpha\beta x_1(t) = 0 \iff r^2 - \alpha\beta = 0 \iff r = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

Vi får alltså följande fundamentalsystem av lösningar: $\{e^{\sqrt{\alpha\beta}t}, e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}\}$, vilket ger oss den allmänna lösningen

$$x_1(t) = C_1 e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Nu kan vi beräkna värdet för $x_2(t)$:

$$x_2(t) = -\frac{1}{\alpha}x_1'(t) = -\frac{1}{\alpha}(C_1\sqrt{\alpha\beta}e^{\sqrt{\alpha\beta}t} - C_2\sqrt{\alpha\beta}e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}) = -C_1\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + C_2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

Vi märker att för $C_1 > 0$ gäller $(x_1(t), x_2(t)) \to (\infty, -\infty)$ och för $C_1 < 0$ gäller $(x_1(t), x_2(t)) \to (-\infty, \infty)$ när $t \to \infty$. Eftersom vi vet att $x_1(t) > 0$ och $x_2(t) > 0$ för alla $t \geq 0$, samt att bakteriepopulationerna förtär varandra utan att öka, så kan ingendera av dessa gälla. Alltså är $C_1 = 0$. Vi kan även konstatera att $C_2 > 0$. Vi får nu

$$\frac{x_1(0)}{x_2(0)} = \frac{C_2}{C_2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

6. Låt $\overline{x}(t)$ vara en lösning till det homogena linjära systemet

$$\overline{x}'(t) = A(t)\overline{x}(t)$$

på det öppna intervallet $I \subset \mathbf{R}$, där $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Visa: om $\overline{x}(t_0) \neq \overline{0}$ för något $t_0 \in I$, så är $\overline{x}(t) \neq \overline{0}$ för alla $t \in I$. *Tips:* använd entydighetssatsen för linjära system.

Lösning: Antag att det existerar något $t_0 \in I$ så att $\overline{x}(t_0) \neq \overline{0}$. Vi vill nu visa att $\overline{x}(t) \neq \overline{0}$ för alla $t \in I$.

Motantagande: Anta att det existerar något $t_1 \in I$ så att $\overline{x}(t_1) = \overline{0}$.

Eftersom derivatan av en konstant funktion är 0, så märker vi nu att $\overline{x}(t) = \overline{0}$ för alla $t \in I$ är en lösning för ekvationen $\overline{x}'(t) = A(t)\overline{x}(t)$ som även satisfierar initialvärdet $\overline{x}(t_1) = \overline{0}$. Eftersom nollvektorn är kontinuerlig och klart uppfyller Lipschitz-villkoret så kan vi hänvisa till entydighetssatsen och konstatera att detta är enda lösningen för ekvationen. Detta är en motsägelse, eftersom vi antog i början att det existerar något $t_0 \in I$ så att $\overline{x}(t_0) \neq \overline{0}$. Alltså kan vårt motantagande inte stämma och $\overline{x}(t) \neq \overline{0}$ för alla $t \in I$.