Differentialekvationer II
Räkneövning 3, modellsvar
27.3. 2014 (kl 16-18 CK111)

1. Vi betraktar Picards iterationer från beviset av lokala existenssatsen,

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

för initialvärdesproblemet
$$y' = y + 2, \quad y(0) = 1.$$

Beräkna funktionerna y_1, y_2 och y_3.

Lösning: Låt $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ och $y' = f(x, y) = y + 2$. Nu är $y_0(x) = y_0 = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och
$$y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x (y_k(t) + 2)\, dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vi kan nu beräkna y_1, y_2 och y_3:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 + \int_0^x (y_0(t) + 2)\, dt = 1 + \int_0^x 3\, dt = 1 + 3x \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x (y_1(t) + 2)\, dt = 1 + \int_0^x (3 + 3t)\, dt = 1 + 3x + \frac{3}{2}x^2 \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x (y_2(t) + 2)\, dt = 1 + \int_0^x (3 + 3t + \frac{3}{2}t^2)\, dt = 1 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3
\end{aligned}$$

Den exakta lösningen $y(x) = 3e^x - 2$ har följande Taylorserie med centrum i 0:

$$y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{k!} = 1 + 3\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = 1 + 3x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \cdots$$

Med induktion kan man bevisa att y_n motsvarar y:s Taylorpolynom av n:te ordningen (med centrum i 0) för alla $n \geq 0$.

2. Reducera den linjära differentialekvationen

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = \sin x$$

till ett 1. ordningens system i matrisformen med 4 obekanta funktioner.

Lösning: Låt först

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ y^{(3)}(x) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Med hjälp av detta kan vi skriva den originala ekvationen som

$$y_4'(x) - 8y_3(x) + 16y_1(x) = \sin x \iff y_4'(x) = \sin x + 8y_3(x) - 16y_1(x)$$

och vi får således följande matrissystem

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \\ y_4'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \\ 8y_3(x) - 16y_1(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin x \end{bmatrix}$$

3. Skriv om systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) + e^t \\ y'(t) &= -2x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) &= y(t) + 2z(t) - e^{-t} \end{aligned}$$

i matrisformen.

Lösning: Vi märker att

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x(t) - 2y(t) + z(t) \\ -2x(t) + y(t) - z(t) \\ y(t) + 2z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

4. Punkterna (x_0, y_0) utgör en *jämviktslösning* till systemet

$$\begin{aligned} x'(t) =& f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) =& f_2(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

om de konstanta funktioner $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ är lösningar, dvs. $f_1(x_0, y_0) = 0 = f_2(x_0, y_0)$. Visa att $(0, 0)$ utgör den enda jämviktslösningen till det linjära systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

om $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Lösning: Vi börjar med att bevisa att ekvationssystemet endast har en lösning. Detta gör vi genom att skriva om ekvationssystemet i matrisform. Alltså:

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{:=A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Eftersom det rör sig om jämviktslösningar, som ju är konstanta, så kan matrissystemet behandlas precis som ett system av okända "konstanta" variabler i stället för funktioner. Från linjäralgebran vet vi nu att om matrisen A:s determinant är olika 0 (vilket ju var vårt antagande) så är A reguljär (alltså har A en invers) och således är lösningen entydig.

Nu gäller det bara att verifiera att $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ faktiskt är en lösning. Detta är rätt så trivialt. Vi märker först att $x(t) = 0 \implies x'(t) = 0$ och att $y(t) = 0 \implies y'(t) = 0$. Nu gäller för alla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ att

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 \\ 0 = c \cdot 0 + d \cdot 0 \end{cases}$$

Så $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ är en lösning, och dessutom den enda jämviktslösningen.

5. Verifiera att $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$, där $t \in \mathbf{R}$, löser systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t). \end{aligned}$$

Vad händer med $(x(t), y(t))$ då $t \to \infty$?

Lösning: Vi börjar med att derivera:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-t} \cos t &\implies x'(t) = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t = -x(t) - y(t) \\ y(t) = e^{-t} \sin t &\implies y'(t) = e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t = x(t) - y(t) \end{aligned}$$

Alltså är $x(t) = e^{-t} \cos t, y(t) = e^{-t} \sin t$ en lösning för ekvationssystemet. Nu märker vi även att

$$|x(t)| = \left| \frac{\cos t}{e^t} \right| \leq \frac{1}{e^t} \to 0 \quad \text{när } t \to \infty$$

och

$$|y(t)| = \left| \frac{\sin t}{e^t} \right| \leq \frac{1}{e^t} \to 0 \quad \text{när } t \to \infty$$

så båda funktionerna går mot 0. Lösningsbanan går alltså mot $(0, 0)$, dvs. origo.

6. Lös det linjära systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) \end{aligned}$$

med elimineringsmetoden (jämför Exempel 5.2, sidorna 59-60 i kompendiet).

Lösning: Vi löser uppgiften genom att följa samma steg som i Exempel 5.2 i kompendiet. Vi börjar med att derivera den övre ekvationen i systemet. Alltså

$$x'(t) = x(t) + y(t) \implies x''(t) = x'(t) + y'(t)$$

Nu substitueras $y'(t) = x(t) - y(t)$ in i ekvationen ovan:

$$x''(t) = x'(t) + y'(t) = x'(t) + x(t) - y(t)$$

Från den första ekvationen i systemet får vi att $y(t) = x'(t) - x(t)$. Vi substituerar in detta i ekvationen ovan:

$$x''(t) = x'(t) + x(t) - y(t) = x'(t) + x(t) - x'(t) + x(t) = 2x(t) \iff x''(t) - 2x(t) = 0$$

Denna linjära ekvation med konstanta termer kan vi lösa med hjälp av karakteristiska polynom:

$$x''(t) - 2x(t) = 0 \iff r^2 - 2 = 0 \iff (r - \sqrt{2})(r + \sqrt{2}) = 0 \iff r = \pm\sqrt{2}$$

Ekvationen har alltså fundamentalsystemet $\{e^{\sqrt{2}t}, e^{-\sqrt{2}t}\}$ och den allmänna lösningen är således

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Med hjälp av detta kan vi beräkna lösningen för $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= x'(t) - x(t) = C_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - C_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} - C_1 e^{\sqrt{2}t} - C_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ &= C_1(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t} - C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t} \end{aligned}$$