Differentialekvationer II
Räkneövning 2, modellsvar
20.3. 2014 (16-18 CK111)

1. Sök alla lösningar $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$$

med hjälp av försöket $y(x) = e^{rx}$.

Lösning: Vi följer tipset och försöker med $y(x) = e^{rx}$. Märk att

$$y(x) = e^{rx} \implies y'(x) = re^{rx} \implies y''(x) = r^2e^{rx} \implies y^{(3)} = r^3e^{rx} \implies y^{(4)} = r^4e^{rx}$$

Vi substituerar nu och får

$$\begin{aligned} r^4e^{rx} - 8r^2e^{rx} + 16e^{rx} = 0 &\iff e^{rx}(r^4 - 8r^2 + 16) = 0 \\ \iff r^4 - 8r^2 + 16 = (r^2 - 4)^2 &= (r-2)^2(r+2)^2 = 0 \iff r = \pm 2 \end{aligned}$$

Ekvationen har alltså två stycken dubbelrötter: $r = 2$ och $r = -2$. Med tidigare teorin om karakteristiska polynom och fundamentalsystem så har denna ekvation alltså ett fundamentalsystem som består av $\{e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, xe^{-2x}\}$. Således är alla lösningar för ekvationen av formen

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4xe^{-2x}, \quad (C_1, \ldots, C_4 \in \mathbb{R})$$

2. Sök alla lösningar $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y^{(4)} - y = 0$$

med hjälp av försöket $y(x) = e^{rx}$.

Lösning: Vi använder oss igen av försöket $y(x) = e^{rx}$. Derivatorna är således samma som i förra uppgiften.

Vi substituerar och får

$$\begin{aligned} &r^4e^{rx} - e^{rx} = 0 \iff e^{rx}(r^4 - 1) = 0 \\ &\iff (r^4 - 1) = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = (r-1)(r+1)(r-i)(r+i) = 0 \\ &\iff r_1 = 1,\ r_2 = -1,\ r_3 = i,\ r_4 = -i \end{aligned}$$

Igen, enligt kunskapen om karakteristiska polynom och fundamentalsystem så märker vi att denna ekvation har fundamentalsystemet $\{e^x, e^{-x}, \cos(x), \sin(x)\}$ och alla lösningar för ekvationen är således

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x), \quad (C_1, \ldots, C_4 \in \mathbb{R})$$

3. Sök en lösning $y_0 = y_0(x)$ som satisfierar den non-homogena differentialekvationen

$$y^{(4)} - y = e^x + e^{-2x}$$

genom försöket $y_0(x) = Axe^x + Be^{-2x}$, där A, B är obestämda konstanter. Vad kan du på basen av uppgift 2:2 säga om den allmänna lösningen till differentialekvationen?

Lösning: Vi börjar med att söka en lösning som satisfierar uppgiftens ekvation. Vi använder oss av försöket $y_0(x) = Axe^x + Be^{-2x}$. Vi får

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= Ae^x + Axe^x - 2Be^{-2x} \\ y_0''(x) &= 2Ae^x + Axe^x + 4Be^{-2x} \\ y_0^{(3)}(x) &= 3Ae^x + Axe^x - 8Be^{-2x} \\ y_0^{(4)}(x) &= 4Ae^x + Axe^x + 16Be^{-2x} \end{aligned}$$

Vi substituerar nu och får

$$4Ae^x + Axe^x + 16Be^{-2x} - Axe^x - Be^{-2x} = e^x + e^{-2x} \iff 4Ae^x + 15Be^{-2x} = e^x + e^{-2x}$$
$$\implies \begin{cases} 4A = 1 \\ 15B = 1 \end{cases} \implies A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{15}$$

En lösning som satisfierar ekvationen är alltså

$$y_0(x) = \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{15}e^{-2x}.$$

I uppgift 2 beräknade vi lösningen för den homogena ekvationen $y^{(4)} - y = 0$. Från tidigare kunskaper vet vi att den allmänna lösningen för en non-homogen ekvation utgörs av den specifika lösningen samt lösningen för den homogena ekvationen. Alltså är den allmänna lösningen

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x) + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{15}e^{-2x}, \quad (C_1, \ldots, C_4 \in \mathbb{R})$$

4. Undersök om f satisfierar villkoret $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$ i lokala existens-och entydighetssatsen i området $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$, då

$$(i)\ f(x, y) = \sin(y) + \cos(x), \qquad (ii)\ f(x, y) = y^{1/3}.$$

Lösning: I denna och i uppgift 5 kommer vi att behöva differentialkalkylens medelvärdessats (DMVS) som borde vara bekant från Analys I. Den lyder så här: Om $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion som är deriverbar i $]a, b[$, så finns det åtminstone en punkt $\xi \in]a, b[$ så att

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| = |\varphi'(\xi)||b - a|$$

(i) För att bevisa Lipschitz-villkoret väljer vi $M = 1$ och två godtyckliga punkter $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. Nu gäller

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\sin(y_1) + \cos(x) - (\sin(y_2) + \cos(x))| = |\sin(y_1) - \sin(y_2)|$$
$$\overset{\text{DMVS}}{=} |\cos(\xi)||y_1 - y_2| \leq 1 \cdot |y_1 - y_2| = M|y_1 - y_2|$$

för något $\xi \in]y_1, y_2[$. Alltså uppfylls villkoret.

(ii) Vi märker att

$$\frac{|f(1, y) - f(1, 0)|}{|y - 0|} = \frac{|\sqrt[3]{y}|}{|y|} = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \to \infty, \quad \text{när } y \to 0.$$

Detta betyder att det är omöjligt att välja ett passligt $0 \leq M < \infty$ som uppfyller Lipschitz-villkoret.

5. Verifiera att funktionen $f(x, y) = e^x \ln(1 + y^2)$ satisfierar villkorena i lokala existens-och entydighetssatsen i området $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 2, y \in \mathbf{R}\}$. Tips: medelvärdessatsen och partiella derivatan $D_2 f(x, y)$ i D.

Lösning: Vi börjar med att konstatera att f är kontinuerlig. Vi märker att

$$D_2 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{2ye^x}{1 + y^2}$$

Låt $(x, y) \in D$. Vi märker nu att om $|y| < 1$ så gäller

$$|D_2 f(x, y)| = \left|\frac{2ye^x}{1 + y^2}\right| < \left|\frac{2ye^2}{1 + y^2}\right| \leq |2ye^2| < 2e^2$$

och om $|y| \geq 1$ så gäller även här

$$|D_2 f(x, y)| = \left|\frac{2ye^x}{1 + y^2}\right| < \left|\frac{2ye^2}{1 + y^2}\right| < \left|\frac{2ye^2}{y^2}\right| = \frac{2e^2}{|y|} \leq 2e^2.$$

Alltså gäller $|D_2 f(x, y)| < 2e^2$ för alla $(x, y) \in D$.

Vi kan nu bevisa Lipschitz-villkoret. Vi väljer $M = 2e^2$ och två godtyckliga punkter $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. Vi får nu att

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \overset{\text{DMVS}}{=} |D_2 f(x, \xi)||y_1 - y_2| \leq 2e^2|y_1 - y_2| = M|y_1 - y_2|$$

för något $\xi \in]y_1, y_2[$ och Lipschitz-villkoret uppfylls.

Alltså satisfierar uppgiftens funktion villkoren för lokala existens- och entydighetssatsen i D.

6. Anta att $a, b \in \mathbb{R}$ och $r \in \mathbb{R}$ är en dubbelrot till ekvationen

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Verifiera att $x_n = r^n(C_1 + C_2 n), n \in \mathbb{N}$, löser differensekvationen

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

för alla konstanter $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. (Obs. dubbelroten $r = -a/2$.)

Lösning: Först märker vi att om $x_n = r^n(C_1 + C_2 n)$, där $n \in \mathbb{N}$ och $r = -a/2$ är en dubbelrot, så är

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= r^{n+1}(C_1 + C_2(n+1)) = r \cdot r^n(C_1 + C_2 n) + C_2 r^{n+1} \\ x_{n+2} &= r^{n+2}(C_1 + C_2(n+2)) = r^2 \cdot r^n(C_1 + C_2 n) + 2C_2 r^{n+2} \end{aligned}$$

Vi substituerar nu dessa in i differensekvationen $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ och får

$$\begin{aligned} & r^2 \cdot r^n(C_1 + C_2 n) + 2C_2 r^{n+2} + a\left(r \cdot r^n(C_1 + C_2 n) + C_2 r^{n+1}\right) + br^n(C_1 + C_2 n) = 0 \\ \iff & r^n(C_1 + C_2 n)\underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0} + 2C_2 r^{n+2} + aC_2 r^{n+1} = 0 \iff 2C_2 r^{n+2} + aC_2 r^{n+1} = 0 \\ \iff & C_2 r^{n+1}(2r + a) = 0 \iff C_2 r^{n+1} \underbrace{\left(2 \cdot \frac{-a}{2} + a\right)}_{=0} = 0 \iff 0 = 0 \end{aligned}$$

Alltså uppfyller $x_n = r^n(C_1 + C_2 n)$ differensekvationen.