Differentialekvationer II
Räkneövning 1, modellsvar
13.3. 2014 (kl 16-18 CK 111)

Under vecka 11 räknar jag igenom några exempel om icke-linjära 2. ordningens differentialekvationer, homogena linjära differentialekvationer av högre ordning med konstanta koefficienter, samt linjära differensekvationer, som **inte** finns i kompendiet. Kopior av anteckningarna finns i rum C326.

1. Lös initialvärdesproblemet

$$y' = \frac{1}{x+y^2}, \quad y(-2) = 0.$$

Tips: skriv differentialekvationen som $-1 + (x+y^2)y' = 0$ och notera att multiplikation med e^{-y} ger en exakt ekvation.

Lösning: Vi använder oss av uppgiftens tips och märker att

$$y' = \frac{1}{x+y^2} \iff -1 + (x+y^2)y' = 0 \iff -e^{-y} + e^{-y}(x+y^2)y' = 0$$

Låt $M(x,y) = -e^{-y}$ och $N(x,y) = e^{-y}(x+y^2)$. Vi märker nu att

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^{-y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

alltså är ekvationen exakt. Eftersom $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, får vi att

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) = -\int e^{-y}\,dx + g(y) = -xe^{-y} + g(y)$$

Eftersom $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, får vi nu att

$$\frac{\partial}{\partial y}(-xe^{-y} + g(y)) = xe^{-y} + g'(y) = e^{-y}(x+y^2) \iff g'(y) = e^{-y}y^2$$

Funktionen g är alltså endast beroende av y och med partiell integrering får vi att

$$\begin{aligned} g(y) &= \int e^{-y}y^2\,dy = -e^{-y}y^2 + \int 2e^{-y}y\,dy \\ &= -e^{-y}y^2 - 2e^{-y}y + \int 2e^{-y}\,dy = -e^{-y}y^2 - 2e^{-y}y - 2e^{-y} \end{aligned}$$

Den allmänna (implicita) lösningen kan alltså skrivas som

$$F(x,y) = -e^{-y}(x+y^2+2y+2) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Initialvärdet $y(-2) = 0$ ger

$$-e^0(-2 + 0 + 2 \cdot 0 + 2) = C \implies C = 0$$

Vi får nu

$$-e^{-y}(x + y^2 + 2y + 2) = 0 \iff x + y^2 + 2y + 2 = 0 \iff y = -1 \pm \sqrt{-1-x}, \quad x \leq -1$$

Initialvärdet uppfylls inte om $y = -1 - \sqrt{-1-x}$, så uppgiftens lösning är

$$y(x) = -1 + \sqrt{-1-x}, \quad x \leq -1.$$

2. Sök en linjär differentialekvation av formen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

för vilken paret $\{e^x, F(x)e^x\}$ utgör ett fundamentalsystem av lösningar på $\mathbf{R}$, där $F(x) = \int_0^x e^{s^2/2} ds$. (Obs. F är integralfunktionen till $s \mapsto e^{s^2/2}$, dvs. $F'(x) = e^{x^2/2}$ för varje $x \in \mathbf{R}$, men $F(x)$ kan inte integreras explicit.)

Lösning: Paret $\{e^x, F(x)e^x\}$ utgör ett fundamentalsystem av lösningar, så vi löser värdena på $p(x)$ och $q(x)$ i uppgiftens differentialekvation genom att placera in lösningarna i ekvationen.

Vi märker att

$$y(x) = e^x \implies y'(x) = e^x \implies y''(x) = e^x$$

ger

$$e^x + p(x)e^x + q(x)e^x = 0 \iff 1 + p(x) + q(x) = 0 \iff p(x) = -q(x) - 1$$

Vi märker att

$$y(x) = F(x)e^x \implies y'(x) = F'(x)e^x + F(x)e^x \implies y''(x) = F''(x)e^x + 2F'(x)e^x + F(x)e^x$$

ger

$$\begin{aligned} &F''(x)e^x + 2F'(x)e^x + F(x)e^x + p(x)(F'(x)e^x + F(x)e^x) + q(x)F(x)e^x = 0 \\ \iff\ &F''(x) + 2F'(x) + F(x) + (-q(x) - 1)(F'(x) + F(x)) + q(x)F(x) = 0 \\ \iff\ &F''(x) + F'(x) - q(x)F'(x) = 0 \iff q(x) = \frac{F''(x)}{F'(x)} + 1 \end{aligned}$$

Eftersom $F'(x) = e^{x^2/2}$ och $F''(x) = xe^{x^2/2}$, så får vi

$$q(x) = \frac{xe^{x^2/2}}{e^{x^2/2}} + 1 = x + 1 \implies p(x) = -x - 2$$

Den sökta differentialekvationen är alltså

$$y'' - (x+2)y' + (x+1)y = 0$$

3. Lös differentialekvationen

$$y'' = (y')^2$$

med substitutionen $y'(x) = z(x)$.

Lösning: Låt $f(x,y) = y^2$. Nu är den givna ekvationen av formen $y'' = f(x, y')$. Genom att substituera med $y'(x) = z(x)$ omvandlas den givna ekvationen till $z' = f(x,z) = z^2$, vilket är en första ordningens differentialekvation. Denna ekvation är separerbar med triviallösningen $z(x) = y'(x) = 0 \implies y(x) = C$, där $C \in \mathbb{R}$. Resten av lösningarna får vi genom separering av variabler

$$\frac{dz}{dx} = z^2 \iff \int \frac{dz}{z^2} = \int 1\, dx \iff -\frac{1}{z} = x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \iff z = -\frac{1}{x + C_1} \quad (x \neq C_1)$$

Tillbakasubstitution med $z(x) = y'(x)$ ger nu

$$y'(x) = -\frac{1}{x+C_1} \implies y(x) = -\int \frac{dx}{x+C_1} = -\ln|x + C_1| + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R})$$

Lösningarna för ekvationen utgörs alltså av

$$y(x) = \begin{cases} C \\ -\ln|x+C_1| + C_2, & \text{där } x \neq -C_1 \end{cases}$$

4. Lös initialvärdesproblemet

$$y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

genom att först lösa $z = z(t)$ från $z' = \frac{f(t,z)}{z}$, där $f(y, y') = e^{2y}$, och därefter $y = y(x)$ från $y'(x) = z(y(x))$.

Lösning: Låt $f(x,y) = e^{2x}$. Då är den givna ekvationen av formen $y'' = f(y, y')$ och vi löser den enligt tipset. Vi löser först

$$z' = \frac{f(t,z)}{z} = \frac{e^{2t}}{z}$$

för $z(t)$. Vi märker att ekvationen är separerbar utan triviallösningar. Vi löser denna:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^{2t}}{z} \iff \int z\, dz = \int e^{2t}\, dt \iff \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}e^{2t} + C_1' \iff z^2 = e^{2t} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

Nu ska vi lösa $y'(x) = z(y(x))$ då $z(y(x))^2 = e^{2y(x)} + C_1$. Vi börjar med att bestämma C_1:

$$\begin{aligned}
&y'(x) = z(y(x)) \iff y'(x)^2 = z(y(x))^2 = e^{2y(x)} + C_1 \\
&y'(0) = 1,\, y(0) = 0 \implies y'(0)^2 = e^{2y(0)} + C_1 \iff 1 = 1 + C_1 \iff C_1 = 0
\end{aligned}$$

Nu eftersom $y'(0) = 1 > 0$ och $y'(x)$ är kontinuerlig, så finns det enligt Analys I kursens resultat ett intervall I så att $0 \in I$ och $y'(x) > 0$ för alla $x \in I$. Åtminstone i detta intervall kan vi lösa ekvationen enligt följande:

$$\begin{aligned}
&y'(x)^2 = z(y(x))^2 = e^{2y(x)} \\
&x \in I \implies y'(x) = \sqrt{e^{2y(x)}} = e^{y(x)}
\end{aligned}$$

Detta är en separerbar ekvation utan triviallösningar, så vi löser den enligt:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = e^y \iff \int \frac{dy}{e^y} = \int 1\, dx \iff -\frac{1}{e^y} = x + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \\
&\iff e^y = -\frac{1}{x + C_2} \iff y = \ln\left(\frac{1}{-x - C_2}\right) \quad (x < -C_2)
\end{aligned}$$

Vi löser nu värdet för C_2:

$$y(0) = 0 \implies 0 = \ln\left(\frac{1}{0 - C_2}\right) \implies C_2 = -1$$

Vi får alltså

$$y(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - x}\right) \quad (x < 1)$$

Åtminstone i intervallet I är detta lösningen för uppgiftens differentialekvation. Med direkt räkning ser vi även att resultatet satisfierar $y'(x)^2 = e^{2y(x)}$ i hela sitt definitionsområde. Således med stöd av entydighetssatsen så är $y(x)$ en lösning till uppgiftens ekvation för alla $x \in (-\infty, 1)$.

5. Bilda motsvarigheten till Binets formel för de sk. Lucas talen y_n, $n \in \mathbf{N}$, som satisfierar differensekvationen

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad y_0 = 2, y_1 = 1.$$

Tips: samma försök $y_n = r^n$, $n \in \mathbf{N}$, där $r \in \mathbf{R}$, som för Fibonacci talen.

Lösning: Precis som för Fibonacci-talen, söker vi här en lösning $y_n = f(n)$ som inte är rekursivt definierad. Vi följer uppgiftens tips och försöker med $y_n = r^n$. Då är $y_{n+1} = r^{n+1}$ och $y_{n+2} = r^{n+2}$. Dessutom märker vi att $r \neq 0$, annars uppfylls inte initialvärdena. Substituering in i uppgiftens ekvation ger nu

$$r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = 0 \iff r^n(r^2 - r - 1) = 0 \iff r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Från rötterna får vi nu att den sökta ekvationen är av formen

$$y_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Hittills har uppgiften varit likadan som härledningen för Binets formel, men detta ändras nu. Vi använder oss nu av de givna initialvärdena för att lösa ut C_1 och C_2.

$$\begin{aligned}
y_0 = 2 &\implies 2 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2 \\
y_1 = 1 &\implies 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \iff 2 = \underbrace{C_1 + C_2}_{=2} + \sqrt{5}(C_1 - C_2) \\
&\iff 0 = \sqrt{5}(C_1 - C_2) \\
&\implies C_1 = C_2 = 1
\end{aligned}$$

Den sökta formeln för Lucastalen är alltså

$$y_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

6. Anta att $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är godtyckliga två gånger deriverbara funktioner i $\mathbb{R}$. Verifiera att funktionen $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, där $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, löser *vågekvationen*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad c > 0 \text{ konstant.}$$

(Konklusion: lösningar av partiella differentialekvationer är helt olika ordinära DEr.)

Lösning: För att lösa denna uppgift kommer vi att definiera ett par hjälpfunktioner och använda kedjeregeln. Låt

$$a(x,t) = x + ct, \quad b(x,t) = x - ct.$$

Då blir $u(x,t) = f(a) + g(b)$ och vi kan nu söka de partiella derivatorna. Vi börjar med ekvationens vänstra led.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(f(a) + g(b)) = \frac{\partial f(a)}{\partial t} + \frac{\partial g(b)}{\partial t} = \frac{\partial f(a)}{\partial a}\cdot\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial g(b)}{\partial b}\cdot\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial f(a)}{\partial a}\cdot c + \frac{\partial g(b)}{\partial b}\cdot(-c) = c\left(\frac{\partial f(a)}{\partial a} - \frac{\partial g(b)}{\partial b}\right) \\
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(a)}{\partial a} - \frac{\partial g(b)}{\partial b}\right) = c\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial a^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial^2 g(b)}{\partial b^2}\cdot\frac{\partial b}{\partial t}\right) \\
&= c\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial a^2}\cdot c - \frac{\partial^2 g(b)}{\partial b^2}\cdot(-c)\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 g(b)}{\partial b^2}\right)
\end{aligned}$$

Högra ledet beräknas på liknande sätt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f(a)+g(b)\right) = \frac{\partial f(a)}{\partial a}\cdot\frac{\partial a(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial g(b)}{\partial b}\cdot\frac{\partial b(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(a)}{\partial a} + \frac{\partial g(b)}{\partial b} \\
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(a)}{\partial a} + \frac{\partial g(b)}{\partial b}\right) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial a^2}\cdot\frac{\partial a(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 g(b)}{\partial b^2}\cdot\frac{\partial b(x,t)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 f(a)}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 g(b)}{\partial b^2}
\end{aligned}$$

Alltså uppfyller $u(x,t)$ uppgiftens ekvation.

Extrapoäng för lösta räkneövningsuppgifter som för *Differentialekvationer I*: för *varje* räkneövning 2–3 lösta uppgifter = +1/2 p., 4–6 lösta uppgifter = +1 p. Extrapoängen (max + 6 p) adderas till poängtalet i kursprovet (4 uppgifter och 2 timmar tid).