Differentialekvationer I
Räkneövning 4
13.2. 2014 (kl 16–18 CK111)

1. Lös den homogena differentialekvationen

$$xyy' = x^2 + y^2$$

med hjälp av substitutionen $v(x) = \frac{y(x)}{x}$.

2. Tillväxten av en bakteriepopulation beskrivs av den exponentiella tillväxtmodellen. Vid tidpunkten $t_0 = 0$ är massan av populationen 1 mg och efter en vecka 20 g.

(i) Bestäm Malthus' parameter $r > 0$ (i lämplig tidsenhet).

(ii) Vid vilken tidpunkt är storleken av populationen 1000 gånger den ursprungliga?

3. Sök ekvationen för den kurva $y = y(x)$ som har följande egenskap: tangenten till kurvan i punkten (x_0, y_0) skär x-axeln i punkten $(x_0 + kx_0^2, 0)$, där $k > 0$ är en konstant, och kurvan löper genom punkten $(1, e)$.

4. Lös differentialekvationen

$$(y')^2 + 2y'y'' = 0$$

genom att substituera $w(x) = y'(x)$.

5. Beräkna Wronskis determinant $W(y_1, y_2)$ för följande par $\{y_1, y_2\}$ av funktioner:

$$(i)\ \{x, x^2\}, \qquad (ii)\ \{x, x\ln(x)\}.$$

Kan paret $\{x, x^2\}$ bilda ett fundamentalsystem av lösningar till någon linjär differentialekvation av 2. ordningen på hela $\mathbf{R}$?

6. Verifiera att $\{e^x, e^{3x}\}$ bildar ett fundamentalsystem av lösningar till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

på $\mathbb{R}$.

Påminnelse: Kursprovet är måndag 24.2 kl 10-12 (samtidigt kursprov i kursen *Introduktion till universitetsmatematiken*). Ta kontakt om det finns motiverat behov att ordna alternativt provtillfälle.