Differentialekvationer I
Räkneövning 5, modellsvar
20.2. 2014 (kl 16–18 CK111)

1. Sök ett fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ av lösningar till

$$(i)\ \ y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad (ii)\ \ y'' + 4y = 0.$$

Lösning: Eftersom dessa ekvationer har konstanta faktorer så löser vi dem genom att söka den karakteristiska funktionen. Metoden presenteras i kapitel 3.3.

(i) Från den karakteristiska funktionen får vi

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \iff (r+2)(r+3) = 0 \iff \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = -3 \end{cases}$$

Enligt sats 3.11 presenteras fundamentalsystemet av lösningar som $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$, alltså för denna ekvation $\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$.

(ii) Från den karakteristiska funktionen får vi

$$r^2 + 4 = 0 \iff r = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} \iff \begin{cases} r_1 = 0 + 2i \\ r_2 = 0 - 2i \end{cases}$$

Från sats 3.13 vet vi att om $r_1 = s + ti$ och $r_2 = s - ti$ för $s, t \in \mathbb{R}$, så är fundamentalsystemet av lösningar $\{e^{sx}\cos(tx), e^{sx}\sin(tx)\}$. Alltså för denna ekvation $\{\cos(2x), \sin(2x)\}$.

2. Visa att funktionen $y(x) = x$ löser

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

om $p(x) + xq(x) = 0$ för alla $x \in I$, där p och q är definierade $I \to \mathbf{R}$.

Lösning: Först antar vi att $p(x) + xq(x) = 0$ för alla $x \in I$, där $p, q \colon I \to \mathbf{R}$. Om $y(x) = x$ så märker vi att $y'(x) = 1$ och $y''(x) = 0$. Vi får nu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 + p(x) \cdot 1 + q(x) \cdot x = p(x) + xq(x) = 0$$

Alltså är $y(x) = x$ en lösning till uppgiftens ekvation.

3. Sök alla lösningar till differentialekvationen

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0$$

med reducering av ordningen. Tips: jämför med föregående uppgift.

Lösning: Vi märker att

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0 \iff y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \iff y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

om $p(x) = \frac{2}{x}$ och $q(x) = -\frac{2}{x^2}$. Eftersom även

$$p(x) + xq(x) = \frac{2}{x} - x\frac{2}{x^2} = 0$$

följer det från uppgift 2 att $y_1(x) = x$ är en lösning för ekvationen.

Vi söker övriga lösningar genom reducering av ordningen. Från sats 3.14 vet vi att om y_1 är en lösning till den homogena ekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ så hittar vi en annan lösning y_2 genom försöket $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, där funktionen u är två gånger deriverbar. Vi gör alltså följande försök:

$$\begin{aligned} y_2(x) = u(x)y_1(x) = xu(x) &\implies y_2'(x) = u(x) + xu'(x) \\ &\implies y_2''(x) = u'(x) + u'(x) + xu''(x) = 2u'(x) + xu''(x) \end{aligned}$$

Insättning i ekvationen ger nu:

$$y_2'' + \frac{2}{x}y_2' - \frac{2}{x^2}y_2 = 0 \iff 2u' + xu'' + \frac{2}{x}(u + xu') - \frac{2}{x^2} \cdot xu = 0 \iff 4u' + xu'' = 0$$
$$\iff 4v + xv' = 0 \quad (\text{med substitutionen } u' = v) \iff v' = -\frac{4v}{x}$$

Vi har alltså fått en separerbar ekvation med den triviala lösningen $v(x) = 0$. Resten av lösningarna får vi genom separering av variabler.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4v}{x} \iff \int \frac{dv}{v} = -4\int \frac{dx}{x} \iff \ln|v| = -4\ln|x| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$
$$\iff |v| = |x|^{-4}e^{C_1} \iff v = \frac{C_2}{x^4} \quad (C_2 = \pm e^{C_1} \neq 0)$$

Eftersom den triviala lösningen var $v(x) = 0$ kan vi även tillåta $C_2 = 0$. Vi substituerar tillbaka med $u'(x) = v(x)$ och integrerar. Vi får nu:

$$u(x) = C_2\int \frac{dx}{x^4} = \frac{-3C_2}{x^3} + C_3 = \frac{C_4}{x^3} + C_3 \quad (C_4 = -3C_2,\ C_3 \in \mathbb{R})$$

Vi kan nu välja $C_4 = 1$ och $C_3 = 0$, och på så sätt får vi en specifik lösning

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) = \frac{1}{x^3} \cdot x = \frac{1}{x^2}$$

Från sats 3.14 följer nu att $\{x, \frac{1}{x^2}\}$ bildar ett fundamentalsystem av lösningar i $]0, \infty[$. Alltså kan alla lösningar skrivas som

$$y(x) = Cx + \frac{C'}{x^2}, \quad (\text{där } C, C' \in \mathbb{R})$$

4. Lös den icke-homogena differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = x$$

genom att variera konstanterna.

Lösning: Metoden för att lösa icke-homogena differentialekvationer genom att variera konstanterna beskrivs i kapitel 3.5. Först löser vi den homogena ekvationen $y'' - 2y' + y = 0$. Detta kan vi göra genom den karakteristiska funktionen:

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \iff (r-1)^2 = 0 \iff 2 = 1$$

Enligt sats 3.12 har nu den homogena ekvationen fundamentalsystemet $\{e^x, xe^x\}$. Nu söker vi en specifik lösning y_p till den icke-homogena differentialekvationen. Detta gör vi genom försöket

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x,$$

där funktionerna c_1 och c_2 antas vara åtminstone en gång deriverbara. Vi får nu

$$y_p'(x) = c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + c_2'(x)xe^x + c_2(x)\cdot(e^x + xe^x)$$

Liksom i kompendiet, antar vi nu att $c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$. Detta gör vi för att slippa en andra ordningens differentialekvation för de okända funktionerna c_1 och c_2. Vi får alltså

$$\begin{aligned} & y_p'(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^x + c_2(x)xe^x \\ \implies & y_p''(x) = c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + c_2'(x)e^x + c_2(x)e^x + c_2'(x)xe^x + c_2(x)\cdot(e^x + xe^x) \\ & \qquad = \underbrace{c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x}_{=0} + c_1(x)e^x + c_2'(x)e^x + 2c_2(x)e^x + c_2(x)xe^x \end{aligned}$$

Om vi nu substituerar in dessa i uppgiftens ekvation så får vi

$$c_1e^x + c_2'e^x + 2c_2e^x + c_2xe^x - 2(c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x) + c_1e^x + c_2xe^x = x \iff c_2'e^x = x$$

Genom att använda detta samt det tidigare antagandet $c_1'e^x + c_2'xe^x = 0$, så räcker det nu att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} c_2'e^x = x \\ c_1'e^x + c_2'xe^x = 0 \end{cases} \implies c_2' = xe^{-x} \quad \text{och} \quad c_1' = -c_2'xe^xe^{-x} = -c_2'x = -x^2e^{-x}$$

Med hjälp av partiell integrering får vi nu

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int(-x^2e^{-x})\,dx = x^2e^{-x} - \int 2xe^{-x}\,dx = x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - \int 2e^{-x}\,dx \\ &= x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} = e^{-x}(x^2 + 2x + 2) \\ c_2(x) &= \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1) \end{aligned}$$

En specifik lösning för uppgiftens ekvation är alltså

$$y_p(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 2)e^x - e^{-x}(x + 1)xe^x = x^2 + 2x + 2 - x^2 - x = x + 2$$

Enligt sats 3.15 är den allmänna lösningen nu

$$y(x) = x + 2 + C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad \text{där } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

5. Lös initialvärdesproblemet

$$y'' + 4y' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Tips: $y(x) = A\sin x + B\cos x$ som lösning till icke-homogena ekvationen.

Lösning: På samma sätt som i förra uppgiften, löser vi först den homogena ekvationen $y'' + 4y' + 4y = 0$. Detta gör vi genom karakteristiska funktionen.

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \iff (r + 2)^2 = 0 \iff r = -2$$

Enligt sats 3.12 är alltså fundamentalsystemet av lösningar för den homogena ekvationen $\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$. Vi använder oss nu av tipset, och försöker hitta en specifik lösning för den icke-homogena ekvationen med försöket

$$y_p(x) = A\sin x + B\cos x \implies y_p'(x) = A\cos x - B\sin x \implies y_p''(x) = -A\sin x - B\cos x$$

Insättning i ekvationen ger

$$\begin{aligned}
&- A\sin x - B\cos x + 4(A\cos x - B\sin x) + 4(A\sin x + B\cos x) = \sin x \\
&\iff \sin x(-A - 4B + 4A) + \cos x(-B + 4A + 4B) = \sin x \\
&\iff \sin x(3A - 4B) + \cos x(4A + 3B) = 1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x
\end{aligned}$$

Det räcker alltså att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3A - 4B = 1 \\ 4A + 3B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1+4B}{3} \\ B = -\frac{4A}{3} = -\frac{4(1+4B)}{9} = -\frac{4+16B}{9} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{3}{25} \\ B = -\frac{4}{25} \end{cases}$$

Alltså är en specifik lösning för uppgiftens ekvation

$$y_p(x) = \frac{3}{25}\sin x - \frac{4}{25}\cos x$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$y(x) = \frac{3}{25}\sin x - \frac{4}{25}\cos x + C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Derivatan är

$$y'(x) = \frac{3}{25}\cos x + \frac{4}{25}\sin x - 2C_1e^{-2x} + C_2e^{-2x} - 2C_2xe^{-2x}$$

Från initialvärdena får vi

$$\begin{aligned}
y(0) = 0 &\implies 0 - \frac{4}{25} + C_1 + 0 = 0 \implies C_1 = \frac{4}{25} \\
y'(0) = 1 &\implies \frac{3}{25} + 0 - 2C_1 + C_2 - 0 = 1 \implies C_2 = 1 + \frac{8}{25} - \frac{3}{25} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = \frac{3}{25}\sin x - \frac{4}{25}\cos x + \frac{4}{25}e^{-2x} + \frac{6}{5}xe^{-2x}$$

6. Lös differentialekvationen

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 2x - 1, \quad x > 0.$$

Obs.: Motsvarande homogena differentialekvation löstes i uppgift 5:3.

Lösning: I uppgift 5:3 beräknade vi att fundamentalsystemet av lösningar för den homogena ekvationen $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ är $\{x, \frac{1}{x^2}\}$. Nu räcker det att hitta en specifik lösning y_p för ekvationen

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 2x - 1 \iff y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Vi gör detta med försöket

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = c_1(x)x + c_2(x)\frac{1}{x^2}$$

där funktionerna c_1 och c_2 antas vara åtminstone en gång deriverbara. Derivering ger nu

$$y_p'(x) = c_1'(x)x + c_1(x) + c_2'(x)\frac{1}{x^2} - c_2(x)\frac{2}{x^3}$$

Igen, såsom i kompendiet, antar vi att $c_1'(x)x + c_2'(x)\frac{1}{x^2} = 0$. Vi får då

$$y_p'(x) = c_1(x) - c_2(x)\frac{2}{x^3} \implies y_p''(x) = c_1'(x) - c_2'(x)\frac{2}{x^3} + c_2(x)\frac{6}{x^4}$$

Insättning av dessa värden i uppgiftens ekvation ger

$$\begin{aligned}
&c_1' - c_2'\frac{2}{x^3} + c_2\frac{6}{x^4} + \frac{2}{x}\left(c_1 - c_2\frac{2}{x^3}\right) - \frac{2}{x^2}\left(c_1x + c_2\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \\
\iff\ & c_1' - c_2'\frac{2}{x^3} + c_2\frac{6}{x^4} + \frac{2}{x}c_1 - c_2\frac{4}{x^4} - c_1\frac{2}{x} - c_2\frac{2}{x^4} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \\
\iff\ & c_1' - c_2'\frac{2}{x^3} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \iff \underbrace{c_1'x + c_2'\frac{1}{x^2}}_{=0} - c_2'\frac{3}{x^2} = 2 - \frac{1}{x} \iff c_2' = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x
\end{aligned}$$

Det räcker nu att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} c_2' = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \\ c_1'x + c_2'\frac{1}{x^2} = 0 \implies c_1' = -c_2'\frac{1}{x^3} = -\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x\right)\frac{1}{x^3} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^2} \end{cases}$$

Integrering ger

$$c_1(x) = \int \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^2}\right) dx = \frac{2}{3}\ln x + \frac{1}{3x} \quad \text{och} \quad c_2(x) = \int \left(-\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{3}\right) dx = -\frac{2x^3}{9} + \frac{x^2}{6}$$

Alltså är en specifik lösning för uppgiftens ekvation

$$y_p(x) = c_1(x)x + \frac{c_2(x)}{x^2} = \frac{2x}{3}\ln x + \frac{1}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2x}{3}\ln x - \frac{2x}{9} + \frac{1}{2}$$

Den allmänna lösningen är således

$$y(x) = \frac{2x}{3}\ln x - \frac{2x}{9} + \frac{1}{2} + C_1x + \frac{C_2}{x^2} = \frac{2x}{3}\ln x + C_3x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{2} \quad \left(C_3 = C_1 - \frac{2}{9},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right)$$