Differentialekvationer I
Räkneövning 2, modellsvar
30.1. 2014

1. Beräkna de partiella derivatorna $D_1 f(x,y)$ och $D_2 f(x,y)$ då

$$(i)\ f(x,y) = e^{\sin(xy)}, \quad (ii)\ f(x,y) = xy + \ln(1 + x^2y^2).$$

*Lösning:* Vi deriverar vardera uttryck, först med avseende på $x$ och sedan med avseende på $y$.

(i) När $f(x,y) = e^{\sin(xy)}$ får vi:

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} e^{\sin(xy)} = e^{\sin(xy)} \cos(xy) y$$
$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{\sin(xy)} = e^{\sin(xy)} \cos(xy) x$$

(ii) När $f(x,y) = xy + \ln(1 + x^2y^2)$ får vi:

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(xy + \ln(1 + x^2y^2)) = y + \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2}$$
$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy + \ln(1 + x^2y^2)) = x + \frac{2x^2y}{1 + x^2y^2}$$

2. Lös differentialekvationen

$$2y + 3 + y'/x = 0$$

som (i) en linjär differentialekvation, (ii) en separerbar differentialekvation.

*Lösning:* (i) Vi löser ekvationen först som en linjär ekvation. Vi märker att

$$2y + 3 + y'/x = 0 \iff y' + 2xy = -3x, \text{ där } x \neq 0.$$

Alltså har ekvationen nu formen $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, där $p(x) = 2x$ och $q(x) = -3x$. Ekvationen är således i standardform och är inte homogen.

Vi använder oss av lösningsmetoden som illustreras i kapitel 1.3 i kompendiet från 2011 (länkat på hemsidan för Differentialekvationer I, hösten 2013).

Först beräknar vi den integrerande faktorn:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

Enligt lösningsmetoden får vi följande allmänna lösning:

$$\begin{aligned}
&y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \iff \mu(x)y'(x) + \mu(x)p(x)y(x) = \mu(x)q(x) \\
&\iff e^{x^2}y' + e^{x^2} \cdot 2xy = e^{x^2} \cdot (-3x) \iff \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}y\right) = -3xe^{x^2} \\
&\iff e^{x^2}y = \int -3xe^{x^2}\,dx = -\frac{3}{2}e^{x^2} + C \quad (C \in \mathbb{R}) \\
&\iff y(x) = -\frac{3}{2} + Ce^{-x^2}, \text{ för } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

(ii) Vi löser nu ekvationen som en separerbar ekvation. Vi märker att

$$2y + 3 + y'/x = 0 \iff y' = -2yx - 3x = x(-2y-3) = p(x)q(y)$$

om $p(x) = x$ och $q(y) = -2y-3$ för alla $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, y \in \mathbb{R}$. Alltså är ekvationen separerbar. Ekvationen har en trivial lösning, detta ser vi från att

$$q(y) = 0 \iff -2y - 3 = 0 \iff y = -\frac{3}{2}.$$

Alltså är den triviala lösningen $y(x) = -\frac{3}{2}$. Resten av lösningarna hittas med separering av variablerna.

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = x(-2y-3) \iff \int \frac{dy}{-2y-3} = \int x\,dx \iff -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+\frac{3}{2}} = \int x\,dx \\
&\iff -\frac{1}{2}\ln|y+\frac{3}{2}| = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad (\text{där } C_1 \in \mathbb{R}) \iff \ln|y+\frac{3}{2}| = -x^2 - 2C_1 \\
&\iff |y+\frac{3}{2}| = e^{-x^2-2C_1} \iff y + \frac{3}{2} = \pm e^{-x^2-2C_1} \\
&\iff y = -\frac{3}{2} \pm e^{-x^2-2C_1} = -\frac{3}{2} + Ce^{-x^2} \quad (\text{där } C = \pm e^{-2C_1} \neq 0)
\end{aligned}$$

Detta ger den allmänna lösningen. Märk att i normala fall skulle $y \neq -\frac{3}{2}$ men eftersom detta var ekvationens triviala lösning så behöver det inte förbjudas och vi kan tillåta $C = 0$.

3. Lös initialvärdesproblemet

$$y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}, \quad y(\pi) = \pi$$

genom att variera konstanten.

*Lösning:* Vi börjar med att lösa den motsvarande homogena ekvationen $y' + (\cos x)y = 0$. Vi märker att

$$y' + (\cos x)y = 0 \iff y' = -(\cos x)y = p(x)q(y)$$

när $p(x) = -\cos x$ och $q(y) = y$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Ekvationen är alltså separerbar och den har en triviallösning $q(y) = 0 \iff y(x) = 0$. Vi beräknar övriga lösningar med seprarering av variabler:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = -(\cos x)y \iff \int \frac{dy}{y} = \int -\cos x\,dx \iff \ln|y| = -\sin x + C_1 \quad (\text{där } C_1 \in \mathbb{R}) \\
&\iff |y| = e^{-\sin x + C_1} \iff y = \pm e^{C_1}e^{-\sin x} = C_2 e^{-\sin x} \quad (\text{där } C_2 = \pm e^{C_1} \neq 0)
\end{aligned}$$

Dessa är alltså lösningarna för den homogena ekvationen, och eftersom triviallösningen var $y(x) = 0$ kan vi även tillåta $C_2 = 0$.

Nu söker vi en specifik lösning till $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}$ genom att substituera in $y(x) = A(x)e^{-\sin x}$ i den. Först märker vi att:

$$y(x) = A(x)e^{-\sin x} \implies y'(x) = A'(x)e^{-\sin x} - A(x)e^{-\sin x}\cos x$$

Substitution ger nu:

$$\begin{aligned}&A'(x)e^{-\sin x} - A(x)(\cos x)e^{-\sin x} + (\cos x)A(x)e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \iff A'(x)e^{-\sin x} = e^{-\sin x}\\ &\iff A'(x) = 1 \iff A(x) = x + C_3 \quad (\text{där } C_3 \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Alltså är en specifik lösning på ekvationen $y(x) = (x + C_3)e^{-\sin x}$.

Enligt sats 1.8 är nu den allmänna lösningen för ekvationen

$$y(x) = (x + C_3)e^{-\sin x} + C_2e^{-\sin x} = (x + C)e^{-\sin x} \quad (\text{där } C = C_2 + C_3).$$

4. Lös den linjära differentialekvationen

$$y' + y = x^2$$

genom att söka en lösning $y(x) = Ax^2 + Bx + C$, där $A, B, C$ är obestämda koefficienter.

*Lösning:* Vi börjar med att utnyttja tipset och försöker hitta passliga konstanter $A, B, C$ så att $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ är en lösning för ekvationen. Vi märker att $y'(x) = 2Ax + B$. Nu får vi

$$y' + y = x^2 \iff Ax^2 + (2A + B)x + B + C = x^2 \iff \begin{cases} A = 1 & \\ 2A + B = 0 & \implies B = -2 \\ B + C = 0 & \implies C = 2 \end{cases}$$

Alltså är $y(x) = x^2 - 2x + 2$ *en* lösning för ekvationen. För att få den allmänna lösningen måste vi först lösa den homogena ekvationen $y' + y = 0 \iff y' = -y$. Denna har den triviala lösningen $y(x) = 0$. Resten av lösningarna får vi genom separering av variablerna:

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx} = -y \iff \int \frac{dy}{y} = \int -1\,dx \iff \ln|y| = -x + C_1 \quad (\text{där } C_1 \in \mathbb{R})\\ &\iff y = \pm e^{-x+C_1} = Ce^{-x} \quad (\text{där } C = \pm e^{C_1} \neq 0)\end{aligned}$$

Eftersom den triviala lösningen var $y(x) = 0$ kan vi även tillåta $C = 0$. Alltså är $y(x) = Ce^{-x}$, där $C \in \mathbb{R}$, lösningen för den homogena ekvationen.

Enligt sats 1.8 är den allmänna lösningen för ekvationen nu

$$y(x) = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2.$$

5. Undersök om följande differentialekvationer är exakta, och i så fall i vilka områden. Sök den implicita lösningen $y = y(x)$ i de exakta fallen.

$$(i) \quad 2x + 3 + (2y - 2)y' = 0, \quad (ii) \quad e^x \sin(y) + 3y - (3x - e^x \sin(y))y' = 0.$$

*Lösning:* (i) Låt $M(x,y) = 2x+3$ och $N(x,y) = 2y-2$. Nu är $M(x,y) + N(x,y)y' = 2x+3+(2y-2)y'$ och då vi konstaterar att både $M(x,y)$ och $N(x,y)$ är deriverbara i hela $\mathbb{R}^2$ så kan vi visa att den givna ekvationen är exakt genom:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+3) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(2y-2) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Vi söker nu de implicita lösningarna till denna ekvation. Vi gör detta genom att försöka hitta $F(x)$ så att $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ och $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$. Vi får

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) = \int (2x+3)\,dx + g(y) = x^2 + 3x + g(y)$$

Vi vill att $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ ska gälla, så vi får

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3x + g(y)) = g'(y) = 2y - 2$$

Ekvationen ovan är alltså klart bara beroende av $y$ och vi får $g(y) = y^2 - 2y$. Den implicita lösningen är nu

$$F(x,y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(ii) Låt nu $M(x,y) = e^x \sin y + 3y$ och $N(x,y) = -(3x - e^x \sin y)$. Nu är $M(x,y) + N(x,y)y' = e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)y'$ och

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^x \sin y + 3y = e^x \cos y + 3 \neq e^x \sin y - 3 = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y - 3x) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Alltså är ekvationen inte exakt.

6. Bestäm de implicita lösningarna $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$x^2 - y + (y^2 - x)y' = 0.$$

*Lösning:* Låt $M(x,y) = x^2 - y$ och $N(x,y) = y^2 - x$. Nu är $M(x,y) + N(x,y)y' = x^2 - y + (y^2 - x)y'$. Både $M(x,y)$ och $N(x,y)$ är deriverbara i hela $\mathbb{R}^2$ så vi kan visa att den givna ekvationen är exakt genom:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = -1 = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Vi försöker nu hitta $F(x)$ så att $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ och $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$. Vi får

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) = \int (x^2 - y)\,dx + g(y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + g(y)$$

Vi vill att $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ ska gälla, så vi får

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{3}x^3 - xy + g(y)) = -x + g'(y) = y^2 - x \iff g'(y) = y^2$$

Ekvationen ovan är alltså klart bara beroende av $y$ och vi får $g(y) = \frac{1}{3}y^3$. Den implicita lösningen är nu

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + \frac{1}{3}y^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$