Yhtälönratkaisusta

Johanna Rämö, Helsingin yliopisto

17. tammikuuta 2014

Yhtälönratkaisu on koulusta tuttua, mutta usein sitä tehdään mekaanisesti sen kummempia ajattelematta. Jotta pystytään ratkaisemaan monimutkaisempia yhtälöitä, on kuitenkin tärkeää ymmärtää, mitä yhtälönratkaisussa tapahtuu.

Yhtälönratkaisussa on kaksi suuntaa

Ryhdytään ratkaisemaan yhtälöä $\sqrt{x+2} = -x$:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x+2} = -x \\
&(\sqrt{x+2})^2 = (-x)^2 \\
&x + 2 = x^2 \\
&-x^2 + x + 2 = 0 \\
&x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1) \cdot 2}}{-2} \\
&x = \frac{-1 \pm 3}{-2} \\
&x = -1 \text{ tai } x = 2.
\end{aligned}
$$

Saadaan siis kaksi ratkaisua, $x = -1$ ja $x = 2$. Ensimmäinen luvuista todellakin on yhtälön ratkaisu, sillä $\sqrt{-1+2} = \sqrt{1} = 1$ ja $-(-1) = 1$. Toinen luvuista ei yllättäen toteutakaan yhtälöä, sillä $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$. Siten $x = 2$ ei ole yhtälön ratkaisu! Mikä meni vikaan?

Ensimmäinen ongelma on, että yhtälöitä kirjoittaessa ei ole kerrottu, miten allekaiset yhtälöt liittyvät toisiinsa. Ovatko ne kenties yhtäpitäviä? Vai onko jälkimmäinen aina edellisen looginen seuraus? Näitä suhteita voidaan ilmaista ekvivalenssi- ja implikaationuolilla tai sanallisesti.

Esimerkiksi yhtälöt $x + 2 = x^2$ ja $-x^2 + x + 2 = 0$ ovat yhtäpitäviä. Toisin sanoen ensimmäisestä yhtälöstä seuraa toinen ja toisesta ensimmäinen. Eli $x + 2 = x^2$, jos ja vain jos $-x^2+x+2 = 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että yhtälöillä on tämälleen samat ratkaisut. Asian ilmaisemiseen voidaan käyttää myös ekvivalenssinuolta:

$$\begin{aligned} & x + 2 = x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Aiempi yhtälönratkaisuyritys tuottaa ylimääräisiä ratkaisuja, sillä yhtälöketjun kaksi ensimmäistä yhtälöä eivät ole yhtäpitäiviä. Tämä johtuu toiseen potenssiin korottamisesta. Tutkitaan hieman tarkemmin, mitä toiseen potenssiin korottaminen tekee yhtälölle.

Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Jos luvut a ja b ovat samoja, niiden neliöt ovat samoja. Tämän asian ilmaisemiseen voidaan käyttää implikaationuolta: $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$. Jos taas kahden luvun neliöt ovat samoja, luvut eivät välttämättä ole samoja. Esimerkiksi lukujen 2 ja -2 neliöt ovat samat. Ei siis voi kirjottaa $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$. Näin ollen ei myöskään voida käyttää ekvivalenssinuolta: ei päde $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.

Edellisen nojalla pätee $\sqrt{x+2} = -x \Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (-x)^2$. Laitetaan vielä kaikki nuolet paikoilleen alussa esitettyyn yhtälöketjuun:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2} = -x \\ \Rightarrow \quad & (\sqrt{x+2})^2 = (-x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 2 = x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1) \cdot 2}}{-2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{-1 \pm 3}{-2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = -1 \text{ tai } x = 2. \end{aligned}$$

Nyt nähdään, miksi yhtälönratkaisu meni pieleen. Jos $\sqrt{x+2} = -x$, niin joko $x = -1$ tai $x = 2$. Kaikki yhtälön ratkaisut löytyvät siis joukosta $\{-1, 2\}$. Toiseen suuntaan ei voida kuitenkaan päätellä mitään, eli ehdosta ”$x = -1$ tai $x = 2$” ei seuraa, että $\sqrt{x+2} = -x$. Siksi tulokseksi saatiin ylimääräisiä lukuja, jotka eivät ole yhtälön ratkaisuja.

Kirjoitetaan vielä lopuksi huolellisesti yhtälön ratkaisu. Se tehdään kahdessa osassa.

Ratkaisu: Ratkaistaan yhtälö $\sqrt{x+2} = -x$. Nähdään, että

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x+2} = -x \\
\Rightarrow\quad & (\sqrt{x+2})^2 = (-x)^2 \\
\Rightarrow\quad & x + 2 = x^2 \\
\Rightarrow\quad & -x^2 + x + 2 = 0 \\
\Rightarrow\quad & x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)\cdot 2}}{-2} \\
\Rightarrow\quad & x = \frac{-1 \pm 3}{-2} \\
\Rightarrow\quad & x = -1 \text{ tai } x = 2.
\end{aligned}
$$

Nyt tiedetään, että jos yhtälö $\sqrt{x+2} = -x$ pätee, niin $x = -1$ tai $x = 2$. Yhtälön ratkaisuja ovat siis joko $x = -1$ tai $x = 2$ tai molemmat.

Tarkistetaan sijoittamalla, mitkä kaikki ovat ratkaisuja. Huomataan, että $\sqrt{-1+2} = \sqrt{1} = 1$ ja $-(-1) = 1$, joten luku -1 on toteuttaa yhtälön $\sqrt{x+2} = -x$. Siten $x = -1$ on yhtälön ratkaisu. Toisaalta $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$, joten luku 2 ei toteuta yhtälöä eikä siten ole ratkaisu.

Siten yhtälön ainoa ratkaisu on $x = -1$.

Huomaa, edellä yhtälönratkaisun välivaiheisiin kirjoitetttiin implikaationuolet, vaikka ekvivalenssinuolikin olisi sopinut moneen paikkaan. Ekvivalenssinuoliten antamasta lisätiedosta ei tässä tapauksessa olisi kuitenkaan mitään hyötyä, sillä niitä ei kuitenkaan voi käyttää joka välivaiheessa.

Ylipäätään *ekvivalenssinuolia ei kannata käyttää, ellei niitä välttämättä tarvita.* Jos pärjäät implikaationuolella, käytä sitä. Ekvivalenssinuolen tapauksessa pitää nimittäin aina tarkistaa että väitteet todella ovat yhtäpitäviä. Se jää helposti tekemättä tai ainakin aiheuttaa lisävaivaa niin kirjoittajalle kuin lukijallekin. Jos kirjoittaa $A \Leftrightarrow B$ täytyy nimittäin tarkistaa kaksi asiaa: väitteestä A täytyy seurata väite B ja väitteestä B täytyy seurata väite A.

Jopa seuraavanlainen merkintätapa saattaa olla hämäävä:

$$
\begin{aligned}
& x + 2 = x^2 & \qquad\qquad || - x^2 \\
\Leftrightarrow\quad & -x^2 + x + 2 = 0
\end{aligned}
$$

Viivan oikealla puolella oleva kommentti perustelee, kuinka ratkaisu etenee ylhäältä alas. Ekvivalenssinuoli tarkoittaa sitä, että päättelyn pitää olla totta myös alhaalta ylös. Sitä ei kuitenkaan perustella millään tavalla.

Koulusta tuttuja 1. ja 2. asteen reaalilukuyhtälöitä saa ratkaista ekvivalenssien avulla, sillä tiedämme, mitä operaatioita yhtälöille saa tehdä niin, että yhtäpitävyys säilyy. Voidaan esimerkiksi kirjoittaa

$$\begin{aligned} & 2x + 3 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = -2 \\ \Leftrightarrow \quad & x = -1. \end{aligned}$$

tai

Seuraavat yhtälöt ovat yhtäpitäviä:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 1 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Monimutkaisempia yhtälöitä pitää kuitenkin käsitellä suurella varovaisuudella, sillä ne eivät välttämättä ratkea ekvivalenssien avulla kuten alun esimerkistä nähtiin. Sama pätee hieman eksoottisempiin yhtälöihin, joiden muuttujat eivät ole lukuja, vaan vaikkapa matriiseja. Niiden ratkaisussa implikaatioiden käyttäminen on yleensä järkevämpää ja turvallisempaa kuin ekvivalenssien.

Kuinka osoittaa kaksi lauseketta samoiksi?

Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)(a+b) &= a^2 + 2ab + b^2 \\ aa + ab + ba + bb &= a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 + ab + ab + b^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Koska päädytään lopputulokseen, joka on aina tosi, väite pätee. Vai olemmeko itse asiassa todistaneet yhtään mitään?

Ennen kuin pureudutaan edellisen todistuksen ongelmiin, tutkitaan toista esimerkkiä. Osoitetaan, että $3 = 17$:

$$\begin{aligned} 3 &= 17 && \| \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 &= 0 \cdot 17 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Päädytään lopputulokseen $0 = 0$, joka on aina tosi. Siis $3 = 17$.

Edellinen todistus ei varmastikaan ole pätevä. Sen rakenne on kuitenkin aivan samanlainen kuin ensimmäisen todistuksen, joten ensimmäisessä todistuksessakin on jotain pielessä.

Ensinnäkin ongelmana on, että kummassakaan todistuksessa ei ole kerrottu, miten allekain kirjoitetut yhtälöt riippuvat toisistaan. Kirjoitetaan jälkimmäisen todistuksen yhtälöketju uudelleen käyttäen implikaatio- ja ekvivalenssinuolia:

$$\begin{aligned} & 3 = 17 \\ \Rightarrow \quad & 0 \cdot 3 = 0 \cdot 17 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 0. \end{aligned}$$

Olemme siis itse asiassa osoittaneet, että *jos* $3 = 17$, *niin* $0 = 0$. Toisin sanoen lähdimme liikkeelle väitteestä ($3 = 17$) ja lopputuloksi tuli jotain, joka jo tiedettiin ($0 = 0$). Matemaattisen todistuksen pitäisi kulkea aivan toiseen suuntaan! Sen, mitä halutaan todistaa, on oltava lopputulos. Siksi todistus ei toimi.

Kirjoitetaan sitten uudelleen todistuksista ensimmäinen. Nyt jokaisen väliin sopiikin ekvivalenssinuoli:

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 0. \end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että väite $0 = 0$ on yhtäpitävä väitteen $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kanssa. Koska $0 = 0$ pätee, myös $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pätee.

Vaikka edellinen todistus on loogisesti pätevä, se on melko monimutkainen. Jokaisen ekvivalenssinuolen kohdalla on tarkistettava, että edellisestä väitteestä seuraa jälkimmäinen ja jälkimmäisestä edellinen. Tuntuu myös hieman kummalliselta, että yhtälön oikea puoli pysyy samanlaisena lähes todistuksen loppuun saakka.

Kirjoitetaan todistus uudelleen järkevämmällä ja helpommalla tavalla. Lähdetään liikkeelle yhtälön vasemmasta puolesta ja muokataan sitä:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= aa+ab+ba+bb\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

Näin olemme osoittaneet, että $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Ekvivalenssinuolia ei itse asiassa tarvittu lainkaan.

Katsotaan vielä yhden esimerkin avulla, miten todistaa kaksi lauseketta samoiksi selkeästi ja helposti. Tällä kertaa halutaan osoittaa, että luku 1 toteuttaa yhtälön $\sqrt{x^2-x+4} = x^2+1$. On siis osoitettava, että $\sqrt{1^2-1+4} = 1^2+1$. Lasketaan ensin yhtälön toinen puoli:

$$\sqrt{1^2-1+4} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2,$$

ja sitten toinen puoli:

$$1^2+1 = 1+1 = 2.$$

Koska molemmista laskuista tulee sama tulos, pätee yhtälö $\sqrt{x^2-x+4} = x^2+1$, kun $x=1$. Siis luku 1 toteuttaa yhtälön $\sqrt{x^2-x+4} = x^2+1$.

Ohjeita yhtälöiden ratkaisemiseen

- Yhtälöitä ei voi vain kirjoittaa allekkain kertomatta, miten yhtälöt riippuvat toisistaan. Käytä nuolia tai sanoja.
- Kaikki yhtälöt eivät ratkea yhtäpitäviä yhtälöitä muodostamalla. Eräs tapa ratkaista yhtälö on johtaa siitä uusia yhtälöitä ja tarkistaa lopuksi, mitkä saaduista ratkaisuista ovat alkuperäisen yhtälön ratkaisuja.
- Muista, että ekvivalenssinuolessa on kaksi suuntaa.
- Älä käytä ekvivalenssinuolta, jos implikaationuoli riittää.
- Älä käytä nuolia, jos pärjäät suomen kielen sanoilla. Yhtälönratkaisussa nuolet ovat kuitenkin usein käytännöllisiä.
- Koulusta tutut 1. ja 2. asteen yhtälöt saa ratkaista samaan tapaan kuin ennenkin. Yhtälöiden keskinäinen riippuvuus on kuitenkin ilmaistava nuolin tai sanoin.
- Vältä todistuksia, jotka päättyvät johtopäätökseen $0=0$.