

# Algebra I

2.4.2014

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Johanna Rämö

## Lasketaan joukoilla

- Jäännösluokkajoukon  $\mathbb{Z}_7$  laskutoimitus  $[a]_7 + [b]_7 = [a + b]_7$ .
- Sivuluokkajoukon  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  laskutoimitus  $(a + 7\mathbb{Z}) + (b + 7\mathbb{Z}) = (a + b) + 7\mathbb{Z}$ .
- Sivuluokkajoukon  $G/H$  laskutoimitus  $aH \cdot bH = abH$ .  
MUTTA TÄMÄ EI OLE AINA LASKUTOMITUS!

## Sivuluokkien laskutoimitus

Oletetaan, että  $G$  on ryhmä, jolla on aliryhmä  $H$ .

Halutaan määritellä sivuluokkien joukossa laskutoimitus  $\cdot$  kaavalla

$$aH \cdot bH = abH.$$

**HUOM:** Laskutoimitus voidaan määritellä, jos ja vain jos aliryhmä  $H$  on normaali eli

$$gH = Hg \quad \text{kaikilla } g \in G.$$

## Jatkoa eiliseltä luennolta

Ryhmällä  $S_3$  on aliryhmä  $H = \{(1), (13)\}$ .

Eilen nähtiin, että joukossa  $S_3/H$  ei pysty määrittelemään laskutomitusta kaavalla

$$aH \cdot bH = abH.$$

Tämä johtuu siitä, että  $H$  ei ole normaali.

## Esimerkki

Ryhmällä  $\mathbb{Z}_{12}$  on aliryhmä  $N = \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\}$ .

Aliryhmä  $N$  on normaali.

Voidaan siis määritellä laskutomitukset sivuluokkien joukossa  $\mathbb{Z}_{12}/N$ .

# Tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{12}/N$ yhteenlaskutaulu

$+$	$N$	$[1] + N$	$[2] + N$	$[3] + N$
$N$	$N$	$[1] + N$	$[2] + N$	$[3] + N$
$[1] + N$	$[1] + N$	$[2] + N$	$[3] + N$	$N$
$[2] + N$	$[2] + N$	$[3] + N$	$N$	$[1] + N$
$[3] + N$	$[3] + N$	$N$	$[1] + N$	$[2] + N$

# Ryhmän $\mathbb{Z}_{12}$ yhteenlaskutaulu

+	[0]	[4]	[8]	[1]	[5]	[9]	[2]	[6]	[10]	[3]	[7]	[11]
[0]	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7	11
[4]	4	8	0	5	9	1	6	10	2	7	11	3
[8]	8	4	0	9	1	5	10	2	6	11	3	7
[1]	1	5	9	2	6	10	3	7	11	4	8	0
[5]	5	9	1	6	10	2	7	11	3	8	0	4
[9]	9	1	5	10	2	6	11	3	7	0	4	8
[2]	2	6	10	3	7	11	4	8	0	5	9	1
[6]	6	10	2	7	11	3	8	0	4	9	1	5
[10]	10	2	6	11	7	3	0	4	8	1	5	9
[3]	3	7	11	4	8	0	5	9	1	6	10	2
[7]	7	11	3	8	0	4	9	1	5	10	2	6
[11]	11	3	7	0	4	8	1	5	9	2	6	10