Algebra I

18.3.2014

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Kurssikokeen tulokset ovat ilmestyneet. Maksimipistemäärä on 48 pistettä.
- Kokeenkatsomistilaisuus tänään luennon jälkeen klo 10–11 laitoksen kokoushuoneessa D340.
- Kokeesta saa ottaa kopion, mutta koetta **ei voi ottaa mukaansa**.
- Laitoksen 3. kerroksen taululle kerätään kasaan algebran kurssin rakennetta. Saa osallistua! Neljännessä periodissa esitellyt asiat ovat vaaleanpunaisilla lapuilla.

Uusi apuväline luennoille

- Mene osoitteeseen presemo.helsinki.fi/alg.
- Voit kysyä kysymyksiä niin paljon kuin sielu sietää.
- Samaan osoitteseen tulevat luentoäänestykset.

Kaksi laskutoimitusta

Rengas

Määritelmä

Joukko R kahdella laskutoimituksella $+$ ja $\cdot$ varustettuna on *rengas*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(R1) Pari $(R, +)$ on vaihdannainen ryhmä.

(R2) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen.

(R3) Laskutoimituksella $\cdot$ on neutraalialkio.

(R4) Kaikilla $a, b, c \in R$ pätevät *osittelulait*:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{ja} \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Miksi rengas määritellään niin kuin määritellään?

Voit miettiä esimerkiksi seuraavia kysymyksiä:

- Mikä motivoi määritelmän?
- Miten määritelmän voisi muistaa?

Milloin renkaan osajoukko on rengas?

Kysymys: Milloin renkaan osajoukko on rengas? (Yhteen- ja kertolaskut ovat samat kuin isommassa renkaassa.)

Kertausta: Milloin ryhmän osajoukko on ryhmä?

Ryhmä

Määritelmä

Oletetaan, että $\cdot$ on joukon G laskutoimitus. Tällöin pari $(G, \cdot)$ on ryhmä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G1) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen.

(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $\cdot$.

(G3) Jokaisella G:n alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $\cdot$ suhteen.

Muista tarkistaa, että $\cdot$ on joukon G laskutoimitus!

Ryhmä

Määritelmä

Oletetaan, että $\cdot$ on joukon G laskutoimitus. Tällöin pari $(G, \cdot)$ on ryhmä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G1) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen.

(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $\cdot$.

(G3) Jokaisella G:n alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $\cdot$ suhteen.

Muista tarkistaa, että $\cdot$ on joukon G laskutoimitus!

Aliryhmä

Määritelmä

Oletetaan, että $(G, \cdot)$ on ryhmä ja $H \subset G$. Pari $(H, \cdot)$ on ryhmän $(G, \cdot)$ *aliryhmä*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(H1) Joukko H on vakaa laskutoimituksen suhteen, eli jos $g, h \in H$, niin $gh \in H$.

(H2) Ryhmän $(G, \cdot)$ neutraalialkio on joukossa H.

(H3) Joukko H sisältää kaikkien alkioidensa käänteisalkiot laskutoimituksen $\cdot$ suhteen, eli $g^{-1} \in H$ kaikilla $g \in H$.

Rengas

Määritelmä

Joukko R kahdella laskutoimituksella $+$ ja $\cdot$ varustettuna on *rengas*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(R1) Pari $(R, +)$ on vaihdannainen ryhmä.

(R2) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen.

(R3) Laskutoimituksella $\cdot$ on neutraalialkio.

(R4) Kaikilla $a, b, c \in R$ pätevät *osittelulait*:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{ja} \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Rengas

Määritelmä

Joukko R kahdella laskutoimituksella $+$ ja $\cdot$ varustettuna on *rengas*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(R1) Pari $(R, +)$ on vaihdannainen ryhmä.

(R2) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen.

(R3) Laskutoimituksella $\cdot$ on neutraalialkio.

(R4) Kaikilla $a, b, c \in R$ pätevät *osittelulait*:

$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{ja} \quad (a+b)c = ac + bc.$$

Alirengas

Määritelmä

Oletetaan, että $(R, +, \cdot)$ on rengas ja $S \subset R$. Sanotaan, että kolmikko $(S, +, \cdot)$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ *alirengas*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1. Pari $(S, +)$ on ryhmän $(R, +)$ aliryhmä.
2. Kaikilla $a, b \in S$ pätee $ab \in S$.
3. $1_R \in S$.