

Algebra I

13.3.2014

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Kurssikokeen tulokset ilmestyvät lähipäivinä.
- Ensi viikolla järjestetään kokeenkatsomistilaisuus ti 18.3. klo 10–11 laitoksen kokoushuoneessa D340.
- Koekeesta saa ottaa kopion, mutta **ei voi ottaa mukaansa**.
- Laitoksen 3. kerroksen taululle kerätään kasaan algebran kurssin rakennetta. Saa osallistua! Neljännessä periodissa esitellyt asiat ovat vaaleanpunaisilla lapuilla.

Uusi apuväline luennoille

- Mene osoitteeseen premo.helsinki.fi/alg.
- Voit kysyä kysymyksiä niin paljon kuin sielu sietää.
- Samaan osoitteeseen tulevat luentoäänestykset.

Matemaattisen todistuksen lukeminen

Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Määritellään ryhmän G relaatio \sim seuraavasti:

$$a \sim b, \quad \text{jos} \quad a^{-1}b \in H.$$

Väite: Relaatio \sim on transitiivinen.

Todistus:

Oletetaan, että $a, b, c \in G$. Oletetaan, lisäksi, että $a \sim b$ ja $b \sim c$.

Nyt $a^{-1}b \in H$ ja $b^{-1}c \in H$.

Huomataan, että $a^{-1}c = (a^{-1}b)(b^{-1}c)$.

Joukko H on aliryhmä, joten $(a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$.

Siispä $a \sim c$, ja relaatio on transitiivinen.

Selitys:

- Transitiivisuus tarkoittaa sitä, että jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$. Tämä on siis väite, joka pitää todistaa.
- Muotoa jos...niin olevat väitteet osoitetaan olettamalla väitteen alkuosa. Siksi oletetaan, että $a \sim b$ ja $b \sim c$.
- Relaaation \sim määritelmän mukaan nyt pätee $a^{-1}b \in H$ ja $b^{-1}c \in H$.
- Pitäisi osoittaa, että $a \sim c$ eli $a^{-1}c \in H$. Siksi tutkitaan tuloa $a^{-1}c$.
- $(a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}c$, koska alkio ja sen neutraalialkio supistuvat pois.
- Koska H on aliryhmä, se sisältää alkioidensa tulot. Siis $(a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$ eli $a^{-1}c \in H$.
- On siis päästy lopputulokseen $a^{-1}c \in H$ niin kuin pitikin.

Matemaattisen todistuksen lukeminen

Kun luet todistusta, tee seuraavat asiat jokaisen lukemasi rivin (tai virkkeen) jälkeen:

- Yritä tunnistaa keskeisimmät rivillä käytetyt ideat.
- Pyri selittämään itsellesi jokainen päättelyaskel selvittämällä, miten se liittyy todistuksessa aiemmin esiintyneisiin asioihin tai aikasempiin tietoihisi. Voit sanoa selityksen ääneen tai kirjoittaa sen muistiin.
- Jos jokin asia on ristiriidassa oman käsityksesi kanssa, sano sekin ääneen (tai kirjoita muistiin).

Ennen kuin siirryt seuraavalle riville, kysy itseltäsi seuraavat asiat:

- Ymmärrätkö, mitä ideoita käytettiin?
- Ymmärrätkö, miksi tiettyä ideaa käytettiin?
- Miten tämä idea liittyy toisiin ideoihin tässä todistuksessa? Entä aikaisempaan tietooni asiasta?
- Auttavatko selitykseni vastaamaan esittämiini kysymyksiin?

Tehtävä

Ryhmällä S_3 on aliryhmä $H = \{(1), (23)\}$.

Määritä kaikki aliryhmän H vasemmat sivuluokat (eli joukko S_3/H).

Pohdittavaa

Miksi sivuluokkaa kutsutaan sivuluokaksi?