

Algebra I

4.2.2014

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Jäännösluokat

Päteekö $[15]_8 = [23]_8$?

Jäännösluokat

Jäännösluokat $[a]_n$ ja $[b]_n$ ovat samat, jos ja vain jos $a \equiv b \pmod{n}$.

Jäännösluokat muodostavat ryhmiä

Tästä lähin jäännösluokkaryhmiä käytetään kellotauluryhmän sijaan.

Miten korjaisit ratkaisua?

Tehtävä: Osoitetaan, että $17\mathbb{Z}$ on ryhmän \mathbb{Z} aliryhmä.

Ratkaisu:

(H1) Oletetaan, että $n, m \in \mathbb{Z}$. Nyt $17n, 17m \in 17\mathbb{Z}$. Nähdään, että

$$17n + 17m = 17(n + m) \in 17\mathbb{Z}.$$

(H2) Ryhmän \mathbb{Z} neutraali-alkio on 0. Koska $0 = 17 \cdot 0$, niin $0 \in 17\mathbb{Z}$.

(H3) $17(-n) \in 17\mathbb{Z}$. Päte $17n + 17(-n) = 0$ ja $17(-n) + 17n = 0$.

Aliryhmä

Määritelmä

Oletetaan, että (G, \cdot) on ryhmä ja $H \subset G$. Pari (H, \cdot) on ryhmän (G, \cdot) *aliryhmä*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

- (H1) Joukko H on vakaa laskutoimituksen suhteen, eli jos $g, h \in H$, niin $gh \in H$.
- (H2) Ryhmän (G, \cdot) neutraalialkio on joukossa H .
- (H3) Joukko H sisältää kaikkien alkoidensa käänteisalkiot laskutoimituksen \cdot suhteen, eli $g^{-1} \in H$ kaikilla $g \in H$.