Algebra I

30.1.2014

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Esimerkki

Merkitään $17\mathbb{Z} = \{17a \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

Osoitetaan, että $(17\mathbb{Z}, +)$ on ryhmä.

Ryhmä

Määritelmä

Oletetaan, että $\cdot$ on joukon G laskutoimitus. Tällöin pari $(G, \cdot)$ on ryhmä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G1) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen.

(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $\cdot$.

(G3) Jokaisella G:n alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $\cdot$ suhteen.

Muista tarkistaa, että $\cdot$ on joukon G laskutoimitus!

Ryhmä

Määritelmä

Oletetaan, että $\cdot$ on joukon G laskutoimitus. Tällöin pari $(G, \cdot)$ on ryhmä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G1) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen.

(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $\cdot$.

(G3) Jokaisella G:n alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $\cdot$ suhteen.

Aliryhmä

Määritelmä

Oletetaan, että $(G, \cdot)$ on ryhmä ja $H \subset G$. Pari $(H, \cdot)$ on ryhmän $(G, \cdot)$ *aliryhmä*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(H1) Joukko H on vakaa laskutoimituksen suhteen, eli jos $g, h \in H$, niin $gh \in H$.

(H2) Ryhmän $(G, \cdot)$ neutraalialkio on joukossa H.

(H3) Joukko H sisältää kaikkien alkioidensa käänteisalkiot laskutoimituksen $\cdot$ suhteen, eli $g^{-1} \in H$ kaikilla $g \in H$.

Määritelmä

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{0} + \bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Joskaista vektoria $\bar{v} \in V$ kohti on olemassa niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
6. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{w} + a\bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
7. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

Aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

c) $\bar{0} \in W$.

Kongruenssi

Päteekö $9 \equiv 21 \pmod 6$?

Keksi mahdollisimman monta eri tapaa tarkistaa asia.

Jäännösluokat

Määritä jäännösluokka $[9]_6$.