Algebra I

28.1.2014

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Ryhmä

Määritelmä

Oletetaan, että $*$ on joukon G laskutoimitus. Tällöin pari $(G, *)$ on ryhmä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G1) Laskutoimitus $*$ on liitännäinen.

(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $*$.

(G3) Jokaisella G:n alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $*$ suhteen.

Muista tarkistaa, että $*$ on joukon G laskutoimitus!

Keksi muistisääntö

Miten muistaa ryhmän määritelmän kolme ehtoa?

Kertolaskumerkintä

Ryhmän laskutoimitusta on tapana merkitä kertomerkillä.

Esim.

Ryhmä G on vaihdannainen, jos $ab = ba$ kaikilla $a, b \in G$.

Kertolaskumerkintä

Jos kyseessä on **konkreettinen** ryhmä, merkitään laskutoimitusta eri symboleilla tilanteen mukaan.

Potenssi

Oletetaan, että G on ryhmä, jossa on alkio x. Olkoon Olkoon positiivinen kokonaisluku.

Tällöin

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ kpl}}$
- $x^0 = e$
- $x^{-n} = (x^n)^{-1}$.

Esimerkki

Merkitään $X = \{0, 1, 2\}$. Potenssijoukko $\mathcal{P}(X)$ on ryhmä, kun laskutoimituksena on symmetrinen erotus $\triangle$:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Olkoon $A = \{1, 2\}$. Määritä A^2.

Potenssien laskusäännöt

Lause

Olkoon G ryhmä ja x sen alkio. Seuraavat kaavat pätevät kaikilla kokonaisluvuilla m ja n:

a) $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$ b) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ c) $(x^m)^n = x^{nm}$.