Algebra I

23.1.2014

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Oletko tyytyväinen ratkaisuun?

Tehtävä: Tutkitaan kokonaislukujen yhteenlaskua. Määritä alkion $x = 5$ käänteisalkio.

Ratkaisu: Kokonaislukujen yhteenlaskun neutraalialkio on 0, sillä $0 + a = a$ ja $a + 0 = a$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$.

Koska $5 + (-5) = 0$ ja $-5 + 5 = 0$, niin $x' = -5$.

Vastaus: $x' = -5$

Neutraalialkio

Oletetaan, että $*$ on joukon S laskutoimitus.

Määritelmä

Joukon S alkiota a kutsutaan *neutraalialkioksi*, jos

$$a * x = x \quad \text{ja} \quad x * a = x \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Käänteisalkio

Oletetaan, että $*$ on joukon S laskutoimitus.

Määritelmä

Oletetaan, että laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio e. Olkoon $x \in S$. Alkiota w kutsutaan alkion x *käänteisalkioksi*, jos

$$x * w = e \quad \text{ja} \quad w * x = e.$$

Ryhmä (vanha versio)

Määritelmä

Joukko G laskutoimituksella $*$ varustettuna on *ryhmä*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G0) Laskutoimitus $*$ on määritelty joukossa G, eli kaikilla alkioilla $x, y \in G$ pätee $x * y \in G$.

(G1) Laskutoimitus $*$ on liitännäinen.

(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $*$.

(G3) Jokaisella G:n alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $*$ suhteen.

Ryhmä

Määritelmä

Oletetaan, että $*$ on joukon G laskutoimitus. Tällöin pari $(G, *)$ on ryhmä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G1) Laskutoimitus $*$ on liitännäinen.

(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $*$.

(G3) Jokaisella G:n alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $*$ suhteen.

Muista tarkistaa, että $*$ on joukon G laskutoimitus!

Symmetriaryhmät

Esimerkiksi neliön kierrot ja peilaukset muodostavat ryhmän.

Neliön symmetriat

	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
E	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
K_{90°	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E	P_4	P_1	P_2	P_3
K_{180°	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°	P_3	P_4	P_1	P_2
K_{270°	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°	P_2	P_3	P_4	P_1
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°
P_2	P_2	P_3	P_4	P_1	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°
P_3	P_3	P_4	P_1	P_2	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°
P_4	P_4	P_1	P_2	P_3	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E

Määritelmä

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{0} + \bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Joskaista vektoria $\bar{v} \in V$ kohti on olemassa niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
6. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{w} + a\bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
7. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.