

## Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2014

### Harjoitus 9

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 28.3.2014 klo 19.30

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 11.4.2014 klo 19.30

### Tehtäväsarja I

1. Rengas  $M_2(\mathbb{Z}_3)$  koostuu kaikista  $2 \times 2$  -matriiseja, joiden alkiot ovat kunnassa  $\mathbb{Z}_3$ . Tutkitaan tämän renkaan alkioita

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että matriisi  $A$  on matriisin  $B$  käänteismatriisi.

2. Tutkitaan jälleen esimerkissä 12.6 on esiteltyä Boolean rengasta  $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ , missä  $X = \{0, 1\}$ . Merkitään  $A = \{0\}$ . Määritä  $A^3 - 2A + 3$ .
3. Olkoon  $R$  rengas,  $a \in R$  ja  $n \in \mathbb{Z}$ . Osoita, että  $na = an$ . (*Neuvo: Induktio.*)

### Tehtäväsarja II

4. Lue lause 14.3 ja sen todistus. Selvitä itsellesi todistuksen välivaiheet selittävän lukutavan mukaisesti. (Ks. harjoitus 8 tehtävä 5 tai luentokalvot.) Kirjoita selityksesi ylös.
- 5.\* Osoita, että jokaisessa kokonaisalueessa  $D$  pätee niin sanottu *supistamissääntö*: jos  $ab = ac$  ja  $a \neq 0$  joillakin  $a, b, c \in D$ , niin  $b = c$ .
6. Anna esimerkki renkaasta ja sen alkioista, joille edellisen tehtävän supistamissääntö ei päde.

### Tehtäväsarja III

Tutustu polynomeja käsittelevään lukuun 21.

7. Rengas  $\mathbb{Z}_6[X]$  koostuu polynomeista, joiden kertoimet ovat renkaan  $\mathbb{Z}_6$  alkioita. Tutkitaan polynomirenkaan  $\mathbb{Z}_6[X]$  alkioita

$$P = 3X^2 + 4X - 1, \quad Q = 2X^3 + 3X, \quad R = 8X^3 + 3X^2 + X + 11.$$

- (a) Määritä renkaan  $\mathbb{Z}_6[X]$  alkio  $PQ$ .
- (b) Osoita, että  $P + Q = R$ .

- (c) Mikä on polynomin  $PQ$  aste?
8. Tutkitaan polynomirenkaan  $\mathbb{Z}_3[X]$  alkioita
- $$P = X^3 + 2X^2 + 1, \quad Q = 2X^2 + X + 1 \quad \text{ja} \quad S = 4X^3 + 2X^2 - 2$$
- Mitkä näistä polynomeista ovat samoja?
9. Määritä edellisen tehtävän polynomeja vastaavat polynomikuvaukset. Mitkä kuvauksista ovat samoja?

### Tehtäväsarja IV

Tutustu lukuihin 15.1 ja 15.2, joissa käsitellään normaaleja aliryhmiä ja sivuluokkien laskutoimituksia.

10. Ryhmän  $S_3$  aliryhmän  $H = \{(1), (13)\}$  vasemmat sivuluokat määritettiin harjoituksen 7 tehtävässä 1. Määritä aliryhmän oikeat sivuluokat. Onko aliryhmä normaali?
11. Ryhmällä  $\mathbb{Z}_{16}$  on aliryhmä  $H = \langle [4]_{16} \rangle$ . Onko  $H$  normaali?
12. Jatkoa edelliseen tehtävään. Koska  $H$  on normaali aliryhmä, joukossa  $\mathbb{Z}_{16}/H$  voidaan määrittellä laskutoimitus ehdolla

$$([a]_{16} + H) + ([b]_{16} + H) = [a]_{16} + [b]_{16} + H.$$

Mikä joukon

$$\mathbb{Z}_{16}/H = \{H, [1]_{16} + H, [2]_{16} + H, [3]_{16} + H\}$$

alkioista on  $([1]_{16} + H) + ([3]_{16} + H)$ ? Entä  $([3]_{16} + H) + ([3]_{16} + H)$ ?

### Tehtäväsarja V

- 13.\* Matriisiryhmällä  $GL_2(\mathbb{R})$  on aliryhmä

$$S = \{a \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(a) = 1\}.$$

Merkitään

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ovako sivuluokat  $aS$  ja  $bS$  samat?

14. Määritä kaikki ryhmän  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  aliryhmät.

### Ylimääräinen tehtävä

15. Osoita, että renkaassa yhteenlaskun vaihdannaisuus seuraa renkaan määritelmän muista ehdoista. Kyseinen ehto on siis periaatteessa turha. (Jos käytät apunasi renkaan laskusääntöjä, varmista, että niiden todistamisessa ei käytetty yhteenlaskun vaihdannaisuutta.)