Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014
Harjoitus 8

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 21.3.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 4.4.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1.* Tutkitaan ryhmää $G = \{1, a, b, c, d, e, f, g, h\}$, jolla on oheinen kertotaulu. Määritä aliryhmän $\langle f \rangle$ vasempien sivuluokkien joukko $G/\langle f \rangle$. Perustele vastauksesi.

$\cdot$	1	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h	1
b	b	c	d	e	f	g	h	1	a
c	c	d	e	f	g	h	1	a	b
d	d	e	f	g	h	1	a	b	c
e	e	f	g	h	1	a	b	c	d
f	f	g	h	1	a	b	c	d	e
g	g	h	1	a	b	c	d	e	f
h	h	1	a	b	c	d	e	f	g

2. Ryhmällä $6\mathbb{Z}$ on aliryhmä $18\mathbb{Z}$. Määritä sivuluokkien joukko $6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. Muista perustella vastauksesi.

3.* Jatkoa edelliseen tehtävään. Mikä on aliryhmän $18\mathbb{Z}$ indeksi $[6\mathbb{Z} : 18\mathbb{Z}]$?

4. Olkoon G ryhmä, jonka kertaluku on pq, missä p ja q ovat alkulukuja. Osoita, että jokainen ryhmän G aito aliryhmä on syklinen.

Tehtäväsarja II

5. Tutustu tehtäväpaperin lopussa olevaan tekstiin, jossa käsitellään todistusten lukemista. Seuraavassa on annettu erään lauseen todistus. (Se on itse asiassa osa lemmaa 10.5.) Selitä itsellesi todistuksen välivaiheet tekstissä annetun ohjeen mukaisesti ja kirjoita selityksesi ylös.

   Lause: Olkoon G on ryhmä, jolla on aliryhmä H. Oletetaan, että $a, b \in G$. Jos $aH = bH$, niin $a^{-1}b \in H$.

   Todistus: Käytetään apuna sivuluokkarelaatiota $\sim$. Oletetaan, että $aH = bH$. Tällöin alkioiden a ja b edustamat ekvivalenssiluokat ovat samat. Tästä seuraa, että edustajat ovat ekvivalentteja, eli $a \sim b$. Näin ollen $a^{-1}b \in H$.

Tehtäväsarja III

Tutustu kirjan lukuun 12.4, jossa käsitellään alirenkaita.

6. Onko $2\mathbb{Z}$ renkaan $\mathbb{Z}$ alirengas?
7. Onko joukko
$$A = \left\{ \frac{a}{5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$
renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas?

Tehtäväsarja IV

Tutustu lukuun 13, jossa käsitellään kuntia.

8. Määritä kaikki renkaan $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ yksiköt.
9. Onko renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas
$$A = \left\{ \frac{a}{5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$
kunta?

Tehtäväsarja V

Tutustu kirjan lukuun 14, jossa käsitellään kokonaisalueita.

10. Onko rengas $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kokonaisalue?
11. Ratkaise kokonaisalueessa yhtälö $x^2 = x^3$. (Muista, että saat käyttää vain renkaan ja kokonaisalueen ominaisuuksia.)
12. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mitkä ovat yhtälön ratkaisut renkaassa $\mathbb{Z}_4$? Miten selität sen, että näissä kahdessa tehtävässä saamasi ratkaisut eivät ole samoja?

Tehtäväsarja VI

13. Oletetaan, että R on rengas ja $a, b \in R$. Päteekö välttämättä
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2?$$

14.* Oletetaan, että R on rengas ja $a, b \in R$. Päteekö välttämättä
$$ab + 2a \cdot 2(-b) = (-3)ab?$$

15. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Osoita, että jos $(R, \cdot)$ on ryhmä, niin renkaassa R on vain yksi alkio, nolla.

Ylimääräinen tehtävä

16. Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmä H. Merkitään $k = [G : H]$ ja oletetaan, että k on äärellinen. Olkoon $g \in G$. Osoita, että $g^m \in H$ jollakin $m \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Matemaattisen todistuksen lukeminen

Kun luet todistusta, tee seuraavat asiat jokaisen lukemasi rivin (tai virkkeen) jälkeen:

- Yritä tunnistaa keskeisimmät rivillä käytetyt ideat.
- Pyri selittämään itsellesi jokainen päättelyaskel selvittämällä, miten se liittyy todistuksessa aiemmin esiintyneisiin asioihin tai aikasempiin tietoihisi. Voit sanoa selityksen ääneen tai kirjoittaa sen muistiin.
- Jos jokin asia on ristiriidassa oman käsityksesi kanssa, sano sekin ääneen (tai kirjoita muistiin).

Ennen kuin siirryt seuraavalle riville, kysy itseltäsi seuraavat asiat:

- Ymmärränkö, mitä ideoita käytettiin?
- Ymmärränkö, miksi tiettyä ideaa käytettiin?
- Miten tämä idea liittyy toisiin ideoihin tässä todistuksessa? Entä aikaisempaan tietooni asiasta?
- Auttavatko selitykseni vastaamaan esittämiini kysymyksiin?

Esimerkki

Seuraavassa on esitetty eräs lause todistuksineen. Sen jälkeen todistuksen vaiheet on selitetty edellä kuvatun menetelmän mukaisesti.

Lause. Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Määritellään ryhmän G relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$a \sim b, \quad \text{jos} \quad a^{-1}b \in H.$$

Tällöin relaatio $\sim$ on transitiivinen.

Todistus: Oletetaan, että $a, b, c \in G$. Oletetaan, lisäksi, että $a \sim b$ ja $b \sim c$. Nyt $a^{-1}b \in H$ ja $b^{-1}c \in H$. Huomataan, että $a^{-1}c = (a^{-1}b)(b^{-1}c)$. Joukko H on aliryhmä, joten $(a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$. Siispä $a \sim c$, ja relaatio on transitiivinen.

Selitys

- Transitiivisuus tarkoittaa sitä, että jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$. Tämä on siis väite, joka pitää todistaa.
- Muotoa jos...niin olevat väitteet osoitetaan olettamalla väitteen alkuosa. Siksi oletetaan, että $a \sim b$ ja $b \sim c$.
- Relaation $\sim$ määritelmän mukaan nyt pätee $a^{-1}b \in H$ ja $b^{-1}c \in H$.
- Pitäisi osoittaa, että $a \sim c$ eli $a^{-1}c \in H$. Siksi tutkitaan tuloa $a^{-1}c$.
- $(a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}c$, koska alkio ja sen neutraalialkio supistuvat pois.
- Koska H on aliryhmä, se sisältää alkioidensa tulot. Siis $(a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$ eli $a^{-1}c \in H$.
- On siis päästy lopputulokseen $a^{-1}c \in H$ niin kuin pitikin.