Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014
Harjoitus 7

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 14.3.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 28.3.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Määritä ryhmän S_3 aliryhmän $B = \{(1), (13)\}$ vasemmat sivuluokat eli määritä joukko S_3/B. Mistä tiedät löytäneesi kaikki sivuluokat?

2. Ryhmällä S_6 on aliryhmä
$$H = \{(1), (13), (16), (36), (136), (163)\}.$$
Ovatko sivuluokat $(135)(426)H$ ja $(15)(2634)H$ samat? Ratkaise tehtävä määrittämättä sivuluokkien alkioita.

Tehtävissä 3–5 tutkitaan ryhmää $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ja sen aliryhmää $H = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

3. Piirrä tasokoordinaatistoon kuva aliryhmästä H.

4. Piirrä kuvat sivuluokista $(2, -1)+H$, $(-1, 1)+H$ ja $(4, 3)+H$. Miltä näyttää aliryhmän H vasenten sivuluokkien joukko $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/H$? Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

5.* Osoita täsmällisesti, että sivuluokat $(2, -1) + H$ ja $(4, 3) + H$ ovat samat.

Tehtäväsarja II

Tutustu Lagrangen lausetta käsittelevät lukuun 10.3.

6. Ryhmällä $\mathbb{Z}_{16}$ on aliryhmä $H = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$. Mitä Lagrangen lause kertoo aliryhmän H indeksistä eli (vasempien) sivuluokkien lukumäärästä? Määritä sivuluokat. Piirrä vielä lopuksi havainnekuva, jossa näkyvät kaikki joukon $\mathbb{Z}_{16}/H$ alkiot.

7. Mikä on ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmän $10\mathbb{Z}$ indeksi? Miksi sen määrittämiseen ei voi käyttää Lagrangen lausetta?

8. Oletetaan, että G on ryhmä ja H sen aliryhmä. Olkoot $a, b \in G$. Täydennä lemman 10.5 todistusta ja todista seuraava väite.

   Jos $aH = bH$, niin $a^{-1}b \in H$.

Tehtäväsarja III

9. Mikä on jakojäännös, kun $7^{541} + 2^{1000}$ jaetaan luvulla 8? Kongruensseista on apua.

10.* Voiko joukossa $\mathbb{Z}_5$ määritellä laskutoimituksen kaavalla

$$[a]_5 * [b]_5 = [|a| + |b|]_5?$$

11. Voiko joukossa $\mathbb{Z}_n$ määritellä laskutoimituksen kaavalla

$$[a]_n * [b]_n = [a^2 - 5b]_n?$$

Tehtäväsarja IV

12. Määritä kompleksiluvun $z = 1/2 + \sqrt{3}/2i$ virittämä aliryhmä ryhmässä $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Piirrä aliryhmän alkiot koordinaatistoon. Keksi ainakin kaksi ryhmää, jotka ovat rakenteeltaan samanlaisia kuin $\langle z \rangle$.

    Vihje: Kompleksilukujen eksponenttiesityksestä on apua. Tietoa kompleksiluvuista löytyy kurssikirjan liitteestä.

Tehtäväsarja V

Tutustu renkaita käsittelevään lukuun.

13. Osoita, että $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ rengas, kun kokonaislukujen laskutoimitukset $\oplus$ ja $\odot$ määritellään seuraavasti:

$$m \oplus n = m + n + 1 \qquad \text{ja} \qquad m \odot n = mn + m + n.$$

14.* Merkitään $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{\frac{a}{2} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Miksei $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ole rengas tavallisen yhteen- ja kertolaskun suhteen?

Luvussa 12.3 kerrotaan, kuinka kokonaisluvut voidaan tulkita renkaan alkioiksi.

15. Tutkitaan rengasta $\mathbb{Z}_6 = \{[0]_6, [1]_2, \ldots, [5]_6\}$. Mitä renkaan alkioita ovat kokonaisluvut 3, 8 ja -2? Perustele vastauksesi.

16. Esimerkissä 12.6 on esitelty Boolen rengas $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$, missä $X = \{0, 1\}$. Mitä renkaan alkioita ovat kokonaisluvut 0, 4 ja -3? Perustele vastauksesi.

Renkaan alkiota kutsutaan yksiköksi, jos sillä on käänteisalkio kertolaskun suhteen.

17. Osoita, että $[3]_4$ on renkaan $\mathbb{Z}_4$ yksikkö. Mitä muita yksiköitä renkaassa $\mathbb{Z}_4$ on?

Ylimääräinen tehtävä

18. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

    (a) Jos G on syklinen ryhmä ja $G \neq \{e\}$, niin G:llä on vähintään kaksi eri virittäjää.

    (b) Äärettömällä syklisellä ryhmällä ei voi olla kolmea eri virittäjää.