

## Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2014

### Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 21.2.2014 klo 19.30

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 21.3.2014 klo 19.30

### Tehtäväsarja I

Tutustu kirjan lukuun 8, jossa käsitellään syklisiä ryhmiä.

1. Ryhmällä  $\mathbb{Z}_{16}$  on aliryhmä  $H = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$ . Onko olemassa alkioita, joka virittää aliryhmän  $H$ ? Toisin sanoen, onko  $H$  syklinen?
2. Onko ryhmän  $S_5$  aliryhmä  $\{(1), (25), (34), (25)(34)\}$  syklinen?
3. Osoita, että matriisiryhmä

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$

on syklinen. (Laskutoimituksena on matriisien kertolasku.)

4. Oletetaan, että  $G$  on ryhmä, jonka neutraalialkio on  $e$ . Oletetaan lisäksi, että alkioille  $g \in G$  pätee  $g^5 = e$ . Lauseen 6.2 mukaan  $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , mutta toisaalta tiedetään, että  $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, g^3, g^4\}$ . Miten selität tämän? Minne katoavat potenssit  $g^5, g^6, g^7 \dots$  ja  $g^{-1}, g^{-2}, \dots$ ? Voit havainnollistaa selitystäsi kuvan avulla.

### Tehtäväsarja II

- 5.\* Oletetaan, että  $G$  on ryhmä ja  $g \in G$ . Oletetaan lisäksi, että  $o(g) = 4$ . Selvitä lauseen 6.9 avulla alkioiden  $g^2$  ja  $g^3$  kertaluvut. (Kurssikirjan 1. painoksessa lauseen numero on 6.7.)
6. Oletetaan, että  $G$  ja  $H$  ovat ryhmiä ja  $f: G \rightarrow H$  on ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos  $H$  on syklinen, niin myös  $G$  on syklinen.

### Tehtäväsarja III

Ryhmällä  $\mathbb{Z}_8$  on aliryhmä  $H = \{[0]_8, [4]_8\}$ . Määritellään joukon  $\mathbb{Z}_8$  relaatio  $\sim$  seuraavasti:

$$[a]_8 \sim [b]_8, \quad \text{jos} \quad -[a]_8 + [b]_8 \in H.$$

Kyseessä on ekvivalenssirelaatio samaan tapaan kuin harjoituksen 5 tehtävässä 13.

7. Mitä alkioita on jäännösluokan  $[1]_8$  ekvivalenssiluokassa?
8. Määritä kaikkien ekvivalenssiluokkien alkioita. Montako ekvivalenssiluokkaa on yhteensä?

## Tehtäväsarja IV

Ryhdy tutustumaan kurssikirjan lukuun 10, jossa käsitellään aliryhmän sivuluokkia.

9. Tutkitaan ryhmän  $\mathbb{Z}_8$  aliryhmää  $H = \{[0]_8, [4]_8\}$ . Määritä sivuluokan  $[2]_8 + H$  alkiot. Vertaa tulosta tehtävään 8. Mitä huomaat?
10. Tutkitaan ryhmän  $S_3$  aliryhmää  $B = \{(1), (23)\}$ . Määritä sivuluokan  $(12)B$  alkiot. Päteekö  $(12)B = (123)B$ ?
11. Ryhmällä  $\mathbb{Q}$  on aliryhmä  $\mathbb{Z}$ . Määritä sivuluokan  $\frac{7}{2} + \mathbb{Z}$  alkiot.
12. Päteekö  $\frac{3}{4} + \mathbb{Z} = -\frac{5}{4} + \mathbb{Z}$ ? Miten voisit tarkistaa asian täsmällisesti?

## Tehtäväsarja V

13. Onko joukko  $H = \{\sigma \in S_7 \mid \sigma(1) = 2\}$  ryhmän  $S_7$  aliryhmä?
- 14.\* Onko joukko  $H = \{\sigma \in S_7 \mid \sigma(1) = 1\}$  ryhmän  $S_7$  aliryhmä?

## Tehtäväsarja VI

- 15.\* Olkoon  $G$  ryhmä ja  $g$  sen alkio. Osoita, että  $\langle g \rangle = \langle g^{-1} \rangle$ .  
*Neuvo:* Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.
16. Selitä omin sanoin käyttämättä matemaattisia symboleita, mitä edellisessä tehtävässä osoitettiin. Tässä ei ole tarkoitus selittää todistuksen välivaiheita, vaan ainoastaan tulos, jonka todistettiin. Lyhyt vastaus siis riittää!
17. Seuraavassa on lueteltu tämän kurssin käsitteitä. Valitse niistä viisi, jotka ovat mielestäsi kaikkein keskeisimpiä. Perustele valintasi.

aliryhmä, bijektio, ekvivalenssiluokka, ekvivalenssirelaatio, isomorfismi, jään-  
nösluokka, kertaluku, kongruenssi, käänteisalkio, laskutoimitus, laskutoi-  
mitustaulu, liitännäisyys, monikerta, neutraalialkio, permutaatio, potenssi,  
ryhmä, sykli, syklinen ryhmä, symmetrinen ryhmä, vaihdannaisuus, vasta-  
alkio, virittäminen.

## Ylimääräinen tehtävä

18. (a) Listaa kaikki ryhmän  $S_4$  alkiot. (Alkiot kannattaa luokitella sen mukaan, millaisia niiden sykliesitykset ovat.)  
(b) Kuinka monen ryhmän  $S_4$  alkion kertaluku on kaksi?  
(c) Kuinka monta kolmen alkion aliryhmää ryhmässä  $S_4$  on?

Lisähaaste: tee sama ryhmälle  $S_5$ .