Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 14.2.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 14.3.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Laske matriisien $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ tulo. Matriisikertolaskusta voit lukea tarvittaessa kurssikirjan liitteestä.

2. Tarkastellaan kääntyvien 2×2 -matriisien ryhmää $GL_2(\mathbb{R})$. Laskutoimituksena on matriisien kertolasku. Tällä ryhmällä on aliryhmä
$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$
Näytä, että kuvaus $f \colon U \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \mapsto a$ on ryhmäisomorfismi. (Ryhmän $\mathbb{R}$ laskutoimitus on luonnollisesti yhteenlasku.)

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Olet nyt osoittanut, että ryhmät $(U, \cdot)$ ja $(\mathbb{R}, +)$ ovat isomorfisia. Selitä omin sanoin, miten tämä näkyy ryhmien alkioiden ulkomuodossa sekä ryhmien laskutoimituksissa.

4. Tuloryhmällä $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on aliryhmä $H = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että ryhmä $(\mathbb{R}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(H, +)$ kanssa. (Ryhmässä H laskutoimituksena on komponenteittain määritelty yhteenlasku.)

Tehtäväsarja II

Tutustu kirjan lukuun 6.1, jossa käsitellään aliryhmän virittämistä.

5. Merkitään $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Mitkä seuraavista alkoista ovat ryhmän $\mathbb{Q}^*$ aliryhmässä $\langle 3 \rangle$?
$$27, \quad 6, \quad \frac{1}{9}, \quad -3$$

6. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmät $\langle 10 \rangle$ ja $\langle -10 \rangle$.

Tehtäväsarja III

Tässä kohtaa kurssikirjan 1. ja 2. painos poikkeavat hieman toisistaan. Jos omistat 1. painoksen, täytyy sinun ryhtyä tutustumaan lukuun 6.2.

7. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}_{15}$ aliryhmä $\langle [10]_{15} \rangle$. Jotta perustelusi on täsmällinen, käytä lemmaa 6.6. (Ensimmäisessä painoksessa lemman numero on 6.7.)

8. Edellisen tehtävän vastaus on $\langle [10]_{15} \rangle = \{[0]_{15}, [5]_{15}, [10]_{15}\}$. Kuitenkin määritelmän mukaan alkion $[10]_{15}$ virittämässä aliryhmässä pitäisi olla kaikki alkion $[10]_{15}$ kokonaislukumonikerrat. Mikä aliryhmän alkioista on $4 \cdot [10]_{15}$? Entä $(-2) \cdot [10]$?

9. Tutkitaan matriisiryhmän $GL_2(\mathbb{R})$ alkiota $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Määritä aliryhmä $\langle A \rangle$. Mikä aliryhmän alkioista on A^5? Entä A^{-2}?

Tehtäväsarja IV

10. Määritä seuraavien ryhmän S_6 alkioiden kertaluvut:

$$(14), \quad (253), \quad (14)(253).$$

11. Tutkitaan korttipakkaa, jossa on kymmenen korttia. Sekoitetaan kortteja niin, että otetaan pakan päältä neljän kortin pino ja laitetaan se pakan alle. Kuinka monen sekoituskerran jälkeen ollaan takaisin lähtötilanteessa?

    Vihje: Edellisen tehtävän havainnoista on hyötyä.

Tehtäväsarja V

Kertaa ekvivalenssirelaation käsite kurssilta Johdatus yliopistomatematiikkaan tai tutustu lukuun 9, jossa käsitellään ekvivalenssirelaatioita.

12. Määritellään kokonaislukujen joukossa relaatio $\sim$ ehdolla

$$a \sim b, \quad \text{jos luvussa } a \text{ on yhtä monta numeroa kuin luvussa } b.$$

    Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Miltä näyttävät sen ekvivalenssiluokat?

13. Määritellään kokonaislukujen joukossa relaatio $\sim$ ehdolla

$$a \sim b, \quad \text{jos} \quad -a + b \in 7\mathbb{Z}.$$

    Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Mikä tuttu relaatio on itse asiassa kyseessä?

14. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä luvun 11 ekvivalenssiluokka. Missä yhteydessä olet aiemmin törmännyt tähän joukkoon?

Tehtäväsarja VI

15.* Olkoon $f\colon G \to H$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos G on vaihdannainen ryhmä, myös H on vaihdannainen ryhmä.

16. Onko jäännösluokkaryhmä $\mathbb{Z}_6$ isomorfinen symmetrisen ryhmän S_3 kanssa?

Ylimääräinen tehtävä

17. Ovatko ryhmät $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ isomorfiset?