

## Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2014

Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 7.2.2014 klo 19.30

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 21.3.2014 klo 19.30

### Tehtäväsarja I

1. Jäännösluokkien joukko  $\mathbb{Z}_6 = \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$  on ryhmä jäännösluokkien yhteenlaskun suhteen. Kirjoita ryhmän laskutoimitustaulu.
2. Etsi neljä jäännösluokkaryhmän  $\mathbb{Z}_6$  aliryhmää. Perustele vastauksesi.
3. Aliryhmät ovat aina ryhmiä. Aliryhmän määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sano- ta mitään tällaista. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi aliryhmän määritelmästä seuraa, että se on ryhmä.

### Tehtäväsarja II

4. Laske ryhmässä  $S_5$  tulo  $\sigma\tau$ , kun

(a)  $\sigma = (125)(34)$  ja  $\tau = (25)(34)$

(b)  $\sigma = (132)$  ja  $\tau = (15)$ .

Anna vastaus syklimuodossa.

5. Määritä ryhmän  $S_6$  permutaatioiden  $(13)(254)$  ja  $(34)$  käänteisalkiot. Perustele vastauk- sesi.
- 6.\* Ratkaise yhtälö  $(34)x(13)(254) = (132)$  ryhmässä  $S_5$ .

*Neuvo:* Jos käytät ekvivalenssinuolia, muista perustella niiden käyttö.

### Tehtäväsarja III

Tutustu kirjan lukuihin 5.1 ja 5.2, jotka käsittelevät ryhmien kertotauluja ja isomorfisuutta.

7. (a) Kirjoita jäännösluokkaryhmän  $\mathbb{Z}_3$  yhteenlaskutaulu.  
(b) Ryhmällä  $S_4$  on aliryhmä  $H = \{(1), (134), (143)\}$ . Kirjoita  $H$ :n kertotaulu.  
(c) Ryhmät  $\mathbb{Z}_3$  ja  $H$  ovat isomorfiset. Etsi kertotaulujen avulla vastaavuus näiden kahden ryhmän välille.
8. Symmetrisellä ryhmällä  $S_4$  on aliryhmä  $H = \{(1), (1234), (1432), (13)(24)\}$ . Kirjoita ryhmän  $H$  kertotaulu. Tiedetään, että neljän alkion ryhmiä on vain kaksi erilaista. Kumpi niistä  $H$  on, neljän alkion syklinen ryhmä vai Kleinin neliryhmä?

9.\* Kirjoita tuloryhmän  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  yhteenlaskutaulu. Tuloryhmän laskutoimitus määritellään komponenteittain:

$$([a]_2, [b]_2) + ([c]_2, [d]_2) = ([a]_2 + [c]_2, [b]_2 + [d]_2) \quad \text{kaikilla } [a]_2, [b]_2, [c]_2, [d]_2 \in \mathbb{Z}_2.$$

Onko  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  neljän alkion syklinen ryhmä vai Kleinin neliryhmä? Perustele vastauksesi.

Tutustu kirjan lukuun 5.3, jossa annetaan varsinainen määritelmä isomorfisuudelle.

10. (a) Osoita, että kuvaus  $f: \mathbb{Z} \rightarrow 17\mathbb{Z}$ ,  $f(a) = 17a$  on bijektio.  
(b) Osoita, että ryhmät  $(\mathbb{Z}, +)$  ja  $(17\mathbb{Z}, +)$  ovat isomorfiset.

### Tehtäväsarja IV

11. (a) Oletetaan, että  $H$  on ryhmän  $\mathbb{Z}$  aliryhmä, jossa on alkio 5. Etsi viisi muuta alkioita, jotka ovat välttämättä aliryhmässä  $H$ .  
(b) Oletetaan, että  $K$  on ryhmän  $S_6$  aliryhmä, jossa on alkio (254). Pystytkö löytämään viisi muuta alkioita, jotka ovat välttämättä aliryhmässä  $K$ ? Kuinka monta alkioita löydät?
12. (a) Etsi jokin ryhmän  $\mathbb{Z}$  aito aliryhmä, jossa on alkio 5.  
(b) Etsi jokin ryhmän  $S_6$  aito aliryhmä, jossa on alkio (254).

### Tehtäväsarja V

Tehtävissä 13–14 tutkitaan ryhmää  $G$  ja sen osajoukkoa

$$Z = \{g \in G \mid xg = gx \text{ kaikilla } x \in G\}.$$

13. Kuvaile omin sanoin ilman matemaattisia symboleita, millaisista alkioista joukko  $Z$  koostuu.
14. Osoita, että  $Z$  on ryhmän  $G$  aliryhmä.<sup>1</sup>
15. Tee itsellesi käsittekartta, jossa ovat ainakin seuraavat käsitteet:

aliryhmä, bijektio, isomorfismi, käänteisalkio, laskutoimitus, laskutoimitustaulu, liitännäisyys, monikerta, neutraalialkio, potenssi, ryhmä, vaihdannaisuus, vasta-alkio

### Ylimääräinen tehtävä

16. Selvitä, mikä tetraedri on. Määritä tetraedrin symmetriaryhmän alkiot. (Tietoa symmetriaryhmistä löytyy luvusta 11.)  
*Lisähaaste:* Selvitä muiden Platonin kappaleiden symmetriaryhmät.

### Kartuta matemaattista sivistystäsi

17. Katso tv-sarja Futuraman jakso The Prisoner of Benda (tuotantokausi 6, jakso 10). Tästä tehtävästä ei jaeta lisäpisteitä.

---

<sup>1</sup>Kyseistä aliryhmää kutsutaan ryhmän  $G$  keskuukseksi.