Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 31.1.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 14.2.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Onko $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän $(\mathbb{Q}, +)$ aliryhmä?

2.* Onko $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä?

3. Onko (K_{12}, 🕒) ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä?

Tehtäväsarja II

Lue kirjasta kappale 4.1, jossa käsitellään permutaatioita. Seuraavissa tehtävissä tutkitaan permutaatioita

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Piirrä kuvat permutaatioista σ, τ ja ρ. Voit valita mielestäsi parhaan tavan havainnollistaa permutaatiota.

Lue sitten kappale 4.2, jossa käsitellään permutaatioiden tuloa.

5. Laske tulot $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$ ja $\sigma \circ \rho$. Muista laskujärjestys!

Lue vielä kappaleesta 4.3 permutaation radoista.

6. Määritä permutaatioiden σ, τ ja ρ radat. Kuvista on apua.

Tehtäväsarja III

Kirjan luvussa 4.3 kerrotaan permutaation sykliesityksestä.

7. Seuraavassa on annettu permutaatioiden sykliesityksiä. Piirrä permutaatoista kuvat, joista näkyy, miten permutaatio kuvaa määrittelyjoukon alkioita.
   (a) ryhmän S_4 alkio (1324)
   (b) ryhmän S_6 alkio (1324)
   (c) ryhmän S_5 alkio $(14)(253)$

8. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
   (a) Ryhmän S_6 alkiot $(16)(35)$ ja $(35)(16)$ ovat samat.
   (b) Ryhmän S_4 alkiot (134) ja (143) ovat samat.
   (c) Ryhmän S_6 alkiot (236) ja $(362)(4)(5)$ ovat samat.

9. Määritellään
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$
Kirjoita permutaatioiden α ja β sykliesitykset. Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.

Tehtäväsarja IV

10. Luettele jäännösluokkien $[6]_{10}$ ja $[26]_{10}$ alkiot. Vaikuttaako siltä, että $[6]_{10} = [26]_{10}$?
11. Ovatko jäännösluokat $[-3]_5$ ja $[21]_5$ samat? Miten ongelman voi ratkaista täsmällisesti, jäännösluokkien alkioita määrittämättä?
12. Jäännösluokkien joukossa $\mathbb{Z}_n$ voi määritellä yhteenlaskun kaavalla $[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$. Osoita, että

    (a) $[3]_5 + [6]_5 = [4]_5$
    (b) $[5]_7 + [3]_7 = [1]_7$.

    Mitä tuttua laskutoimitusta jäännösluokkien yhteenlasku muistuttaa?
13.* Päteekö $[-6]_3 + [2]_3 = [4]_3$? Perustele vastauksesi.
14. Muotoile tulos, jonka seuraava todistus todistaa.

    Oletetaan, että $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ja $x \equiv y \pmod{a}$ sekä $y \equiv z \pmod{a}$. Nyt $a \mid (x-y)$ ja $a \mid (y-z)$. On siis olemassa $k, l \in \mathbb{Z}$, joille pätee $ka = x - y$ ja $la = y - z$. Tästä seuraa, että $x - z = (x-y) + (y-z) = ka + la = (k+l)a$. Siten $a \mid (x-z)$, eli $x \equiv z \pmod{a}$.

Tehtäväsarja V

15. (a) Oletetan, että G on ryhmä, jossa on alkiot a ja b. Seuraavassa on ratkaistu yhtälö $x^2a^2 = xb$. Yhtälönratkaisussa on kuitenkin virhe. Korjaa virhe ja kirjoita kelvollinen ratkaisu.

    Osoitetaan, että yhtälön ratkaisu on $x = ba^{-2}$. Huomataan, että
    $$(ba^{-2})^2a^2 = ba^{-2}ba^{-2}a^2 = (ba^{-2})b.$$
    Siten $x = ba^{-2}$ toteuttaa yhtälön, eli se on yhtälön ratkaisu.

    (b) Oletetaan, että edellisessä kohdan ryhmä on kellotauluryhmä $(K_7, ⌚)$. Oletetaan lisäksi, että $a = 4$ ja $b = 2$. Mikä tässä tapauksessa on yhtälön ratkaisu?
16.* Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d, e, f\}$, jolla on seuraavanlainen laskutoimitustaulu:

$+$	a	b	c	d	e	f
a	f	d	a	e	b	c
b	e	c	b	f	a	d
c	a	b	c	d	e	f
d	b	a	d	c	f	e
e	d	f	e	a	c	b
f	c	e	f	b	d	a

    Määritä seuraavat alkiot:

    (a) $-d$ **(b)** $3a + 2e$ **(c)** $(-4)f$.

17. Oletetaan, että $(G, +)$ on vaihdannainen ryhmä, jolla on neutraalialkio e. Osoita, että joukko $H = \{a \in G \mid 3a = e\}$ on ryhmän G aliryhmä.

Ylimääräinen tehtävä

18. Lauseessa 3.17 on osoitettu, että kahden aliryhmän leikkaus on aina aliryhmä. Milloin kahden aliryhmän yhdiste on aliryhmä?