Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 24.1.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 7.2.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Voiko joukossa $\mathbb{N}$ määritellä laskutoimituksen $*$ kaavalla $a * b = a^2 - 2b + 5$?

2. Merkitään $X = \{0, 1, 2\}$. Voiko potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$ määritellä laskutoimituksen $\triangle$ kaavalla $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?[1]

3. Osoita, että rationaalilukujen joukossa ei voi määritellä laskutoimitusta $\odot$ kaavalla

$$\frac{m}{n} \odot \frac{k}{l} = \frac{m+k}{n^2 + l^2}.$$

   Tässä $m, k \in \mathbb{Z}$ ja $n, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4.* Olkoon $*$ joukon S liitännäinen laskutoimitus. Oletetaan, että joukon S alkioilla x ja y on käänteisalkiot. Osoita, että alkiolla $x * y$ on käänteisalkio.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssikirjan lukuun 3, joka käsittelee ryhmiä. Tällä kurssilla on käytössä ryhmän määritelmä, joka on kirjoitettu hieman eri muotoon kuin kirjassa. Määritelmä löytyy tehtäväpaperin lopusta.

5. Määritellään joukkossa $S = \{X, Y, Z\}$ laskutoimitus $\square$ seuraavan laskutoimitustaulun avulla:

$\square$	X	Y	Z
X	X	Z	Y
Y	Y	X	Z
Z	Z	Y	Y

   Onko $(S, \square)$ ryhmä?

6.* Määritellään joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ laskutoimitus $\oplus$ kaavalla $x \oplus y = 3xy$. Osoita, että $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus)$ on ryhmä.

7. Suljetulla välillä $I = [-2, 2]$ voidaan määritellä laskutoimitus $\boxdot$ kaavalla $a \boxdot b = \max\{a, b\}$. Onko $(I, \boxdot)$ ryhmä?

[1] Operaatiota $\triangle$ kutsutaan symmetriseksi erotukseksi.

Tutustu kurssisivulla olevaan tekstiin, joka käsittelee yhtälönratkaisua.

8. Oletetan, että $(G, \cdot)$ on ryhmä, jossa on alkiot a ja b.

   (a) Seuraavassa on ratkaistu yhtälö $axa^{-1} = b$. Yhtälönratkaisussa on kuitenkin virhe. Etsi tuo virhe.

   Nähdään, että

$$\begin{aligned} axa^{-1} &= b \\ \Rightarrow \quad aa^{-1}x &= b \\ \Rightarrow \quad ex &= b \\ \Rightarrow \quad x &= b. \end{aligned}$$

   Jos yhtälöllä siis on ratkaisu, se on $x = b$. Koska $aba^{-1} = aa^{-1}b = eb = b$, on $x = b$ tosiaankin yhtälön ratkaisu.

   (b) Kirjoita edellisen kohdan yhtälölle pätevä ratkaisu.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssikirjan lukuun 3.6, joka käsittelee aliryhmiä.

9. Osoita, että $A = \{5, 10, 15\}$ on kellotauluryhmän K_{15} aliryhmä. Apuna kannattaa käyttää joukon A laskutoimitustaulua.

10. Oletetaan, että H on kellotauluryhmän K_{20} aliryhmä, jossa on alkio 8. Osoita, että seuraavat alkiot kuuluvat aliryhmään H:

$$20, 16, 12, 4.$$

11. Onko $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ryhmän $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä?

Tehtäväsarja IV

Jatkossa tulemme tarvitsemaan lukuteorian tietoja. Tutustu lukuihin 7.1 ja 7.5 joissa käsitellään jaollisuutta ja kongruenssia.

12. Mitkä seuraavista pitävät paikkansa?

$$8 \mid -64, \quad 4 \mid 11, \quad 0 \mid 5$$

13. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät?

   (a) $8 \equiv 50 \pmod 6$ (b) $13 \equiv 4 \pmod{11}$ (c) $-4 \equiv 11 \pmod 5$

14. Keksi neljä alkiota, jotka ovat joukossa $[5]_7$.

Tehtäväsarja V

15.* Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d\}$, jolla on seuraava laskutoimitustaulu:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Määritä alkiot b^4 ja d^{-2}. (Pelkkä vastaus ei riitä. Muista perustelut.)

16. Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että $(xy)^2 = x^2y^2$. kaikilla $x, y \in G$. Osoita, että ryhmä G on vaihdannainen.

Tehtäväsarja VI

Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Kurssikirjassa on osoitettu, että ryhmän laskutoimitustaulussa kukin alkio esiintyy jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran.

    Oletetaan, että äärellisessä epätyhjässä joukossa S on määritelty laskutoimitus $*$. Jos kukin joukon alkio esiintyy laskutoimitustaulun jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran, onko $(S, *)$ välttämättä ryhmä?

Ryhmän määritelmä

Määritelmä. Joukko G laskutoimituksella $*$ varustettuna on *ryhmä*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G1) Laskutoimitus $*$ on liitännäinen.
(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $*$.
(G3) Jokaisella G:n alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $*$ suhteen.

Ryhmän määritelmän ensimmäiseen lauseeseen sisältyy väite siitä, että $*$ on joukon G laskutoimitus. Kun siis osoitetaan pari $(G, *)$ ryhmäksi, on tarkistettava, että $*$ on todellakin joukon G laskutoimitus. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikille joukon G alkiopareille pitää pystyä määrittämään laskutoimituksessa täsmälleen yksi tulos, ja tuon tuloksen täytyy olla joukon G alkio. (Kurssikirjassa mainittu ehto (G0) sisältyy näihin ehtoihin.)